2019 秋季本科时间序列

# 第 7 次作业参考答案

2019 年 12 月 11 日

1. 见代码部分。

2. 若 $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足以下条件, 则称 $\|\cdot\|_A$ 为模长函数

   (1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 且 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$

   (2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|$

   (3) 若 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 则 $\|\boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

   对于 $\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}$

   (1) 由已知 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 故当 $\boldsymbol{x} \neq 0$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}} > 0$
   当 $\boldsymbol{x} = 0$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}} = 0$
   即条件 (1) 得证

   (2) 对 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 有 $\|\alpha \boldsymbol{x}\|_A = \sqrt{\alpha \boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A} \alpha \boldsymbol{x}} = |\alpha| \sqrt{\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}$
   即条件 (2) 得证

   (3) 先讨论对于 $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{x}}$

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 &= \sqrt{(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^\intercal (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \\
\|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}
\end{aligned}
$$

   有

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\
\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}
\end{aligned}
$$

   由 Cauchy-Schwartz 不等式可知 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

   故 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

即 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2 \le \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2$
因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 则存在正定阵 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$, 故

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_A &= \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B}^2 \boldsymbol{x}} \\
&= \sqrt{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} \\
&= \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|_2 \\
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_A &= \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} \\
&= \sqrt{\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\right)^\top \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} \\
&= \|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_2 \\
&= \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\|_2 \\
&\le \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\|_2
\end{aligned}$$

即 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_A \le \|\boldsymbol{x}\|_A + \|\boldsymbol{y}\|_A$
综上, 证得 $\|\cdot\|_A$ 为一个模长函数