2019 秋季本科时间序列

第 5 次作业参考答案

2019 年 11 月 16 日

1. (a) 残差平方和函数

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\beta}) &= (\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^{\intercal}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) \\
&= \boldsymbol{Y}^{\intercal}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\beta}^{\intercal}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

一阶条件为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= -\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}+2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \\
&= -2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}+2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

得 $\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$
当满足 $(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}$ 存在，即矩阵 $\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}$ 满秩时，$\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 估计量为

$$
\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}
$$

(b) 由 (a) 问知 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}+2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_f &= \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} \\
&= 2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}
\end{aligned}
$$

设 $\boldsymbol{a}$ 为任意非零 K 阶列向量，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^{\intercal}\boldsymbol{H}_f\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}^{\intercal}2\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} \\
&= 2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})^{\intercal}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}) \geq 0
\end{aligned}
$$

故对于任意的解释变量矩阵 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{H}_f$ 都是半正定矩阵

(c) 若要使 $\boldsymbol{H}_f$ 为正定矩阵，则要有 $\boldsymbol{a}^{\intercal}\boldsymbol{H}_f\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})^{\intercal}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})>0$ 成立
于是 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}=0$ 只有零解，即矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满秩，即矩阵 $\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}$ 满秩。
与 (a) 问中求解 OLS 估计值的条件等价

2. (a)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal} \\
&= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal} \\
&= \boldsymbol{P}
\end{aligned}
$$

原式得证

(b) 由已知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{I}\boldsymbol{a}\\ &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{X}$ 列向量张成的线性子空间 $\mathcal{X}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 的作用下保持不变

(c) $(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的列的线性组合，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})^\intercal(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}) &= \big(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}\big)^\intercal\big(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}\big)\\ &= \big(\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\big)\big(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}\big)\\ &= \boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}\\ &= \boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}\\ &= 0\end{aligned}$$

故 $(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y})$ 与 $\mathcal{X}$ 正交，$\boldsymbol{P}$ 是 $\mathbb{R}^K$ 中关于子空间 $\mathcal{X}$ 的投影矩阵