2019 秋季本科时间序列

第 1 次作业答案

2019 年 10 月 5 日

1. 当 $f_x(x)f_y(y) = f(x, y)$ 时，X 与 Y 相互独立

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \\ f_y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{\frac{-(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_x(x)f_y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-\mu_x & y-\mu_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

若使 $f_x(x)f_y(y) = f(x, y)$ 成立必有 $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}$, 则必有 $\rho = 0$，即 $\sigma_{xy} = 0$ 成立

故当且仅当 $\sigma_{xy} = 0$ 时，X 与 Y 相互独立

2. (a) 由已知条件可得

$$\begin{aligned} P(X = x_1) &= pq + p(1-q) = p \\ P(X = x_2) &= (1-p)q + (1-p)(1-q) = 1-p \\ P(Y = y_1) &= pq + (1-p)q = q \\ P(Y = y_2) &= p(1-q) + (1-p)(1-q) = 1-q \end{aligned}$$

故 $P_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_i)$ 恒成立，所以 X 与 Y 相互独立

(b) 若 X 与 Y 相互独立，则必有 $P_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_i)$ 成立，即

$$\begin{aligned}
a &= (a+b)(a+c) \\
b &= (a+b)(b+d) \\
c &= (c+d)(a+c) \\
d &= (c+d)(b+d)
\end{aligned}$$

于是当 X 与 Y 相互独立时，有 $ad = bc$ 成立

反之，当 $ad = bc$ 成立时

$$\begin{aligned}
P(X = x_1)P(Y = y_1) &= (a+b)(a+c) \\
&= a^2 + ac + ab + bc \\
&= a^2 + ac + ab + ad \\
&= a(a+b+c+d) \\
&= a \\
&= P_{11}
\end{aligned}$$

P_{12}, P_{21}, P_{22} 的推导同上

即当 $ad = bc$ 成立时可推得 $P_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_i)$ 恒成立，即 X 与 Y 相互独立

所以 $ad = bc$ 和 X 与 Y 相互独立互为充分必要条件，即证当且仅当 $ad = bc$ 时，X 与 Y 相互独立

3. (a)

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} \mathrm{d}\lambda x \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t \mathrm{d}e^{-t} \\
&= -\frac{1}{\lambda} (t e^{-t}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t) \\
&= -\frac{1}{\lambda} e^{-t}|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{d}e^{-t} \\
&= -\frac{1}{\lambda^2}(t^2 e^{-t}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2te^{-t}\mathrm{d}t) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EX^3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda^3}\int_0^{+\infty} (\lambda x)^3 e^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x \\
&= \frac{1}{\lambda^3}\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\lambda^3}\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{d}e^{-t} \\
&= -\frac{1}{\lambda^3}(t^3 e^{-t}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 3t^2 e^{-t}\mathrm{d}t) \\
&= \frac{3}{\lambda^3}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{6}{\lambda^3}
\end{aligned}
$$

(b) 猜测 $EX^n = \frac{n!}{\lambda^n}$ ，下面用数学归纳法加以证明

已知 $n = 1$ 时，上式成立

假设当 $n = k$ 时，结论成立，即 $EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}$ $(k > 1)$

当 $n = k+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
EX^{k+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \int_{0}^{+\infty} (\lambda x)^{k+1} e^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x \\
&= -\frac{1}{\lambda^{k+1}} \int_{0}^{+\infty} (\lambda x)^{k+1} \mathrm{d}e^{-\lambda x} \\
&= -\frac{1}{\lambda^{k+1}} \left((\lambda x)^{k+1} e^{-\lambda x}\big|_0^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} (k+1)(\lambda x)^{k} e^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x \right) \\
&= \frac{k+1}{\lambda^{k+1}} \int_{0}^{+\infty} (\lambda x)^{k} e^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x \\
&= \frac{k+1}{\lambda^{k+1}} \lambda^k \int_{0}^{+\infty} x^{k} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}
\end{aligned}
$$

即证 $EX^n = \frac{n!}{\lambda^n}$

4. (a)

$$
\begin{aligned}
var(Z) &= E[(Z - EZ)^2] \\
&= E[Z^2 + (EZ)^2 - 2ZEZ] \\
&= EZ^2 - (EZ)^2 \\
&= E[(\alpha X)^2 + (Y)^2 + 2\alpha XY] - (\alpha EX + EY)^2 \\
&= \alpha^2 EX^2 + EY^2 + 2\alpha EXY - \alpha^2 (EX)^2 - (EY)^2 - 2\alpha EXEY \\
&= \alpha^2 [EX^2 - (EX)^2] + EY^2 - (EY)^2 + 2\alpha(EXY - EXEY) \\
&= \alpha^2 var(X) + var(Y) + 2\alpha cov(X, Y)
\end{aligned}
$$

(b) 由于 $var(Z) \geq 0$ 恒成立，则关于 α 的二次方程 $\alpha^2 var(X) + 2\alpha cov(X, Y) + var(Y) \geq 0$ 恒成立，故二次函数判别式 $\Delta = (2cov(X, Y))^2 - 4var(X)var(Y) \leq 0$ 成立. 即 $(cov(X, Y))^2 \leq var(X)var(Y)$，从而可得 $|cov(X, Y)| \leq \sigma_x \sigma_y$