2019 秋季本科时间序列

第 9 次作业

提交日期：1 月 9 日

1. 考虑单变量回归模型
$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad \mathbb{E}\varepsilon_t = 0,$$
其中解释变量 x_t 可能具有内生性问题，即 $\mathrm{cov}(x_t, \varepsilon_t) \neq 0$。
   (a) 计算 α, β 的 OLS 估计量表达式 $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$。
   (b) 令 $\mathrm{cov}(x_t, \varepsilon_t) = \rho\sigma_x\sigma_\varepsilon$，请计算样本量 T 趋于无穷时 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ 的极限，并说明 $\rho > 0$ 或 < 0 时，OLS 估计值相对于真是值是偏大还是偏小。
   (c) 假设存在 x_t 的一个工具变量 z_t，满足 $\mathbb{E}[x_t z_t] \neq 0$ 且 $\mathbb{E}[z_t, \varepsilon_t] = 0$。请计算 $\mathbb{E}[y_t]$ 与 $\mathbb{E}[y_t z_t]$ 的表达式，并由此说明如何对 α, β 进行一致估计。

2. 考虑 2-元变量的 1-阶 VAR 模型
$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_{yt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_{yt} \end{bmatrix},$$
其中 $\mathrm{var}([\varepsilon_{xt}, \varepsilon_{yt}]^\intercal) = \mathrm{diag}(0.1, 0.1)$，即为一个对角阵。
   (a) 请验证上述 VAR(1) 模型是否满足平稳性条件。
   (b) 请计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分解，从而计算 $\boldsymbol{A}^j$ 表达式，$j = 1, 2, \ldots$。
   (c) 对任意 j，请计算 $[x_{t+j}, y_{t+j}]^\intercal$ 关于 $[x_{t-1}, y_{t-1}]^\intercal$ 以及 $[\varepsilon_{xt+i}, \varepsilon_{yt+i}]^\intercal$，$i = 0, \ldots, j$ 的表达式，从而计算脉冲响应函数
$$\frac{\partial x_{t+j}}{\partial \varepsilon_{xt}}, \quad \frac{\partial x_{t+j}}{\partial \varepsilon_{yt}}, \quad \frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_{xt}}, \quad \frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_{yt}}.$$