2019 秋季本科时间序列

第 6 次作业

提交日期：11 月 28 日

1. 按照第 7 讲课件 18 页的方式，将给定样本下的 AR(p) 过程表示为线性回归的形式：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$$

其中

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} X_{p+1} \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_p & \cdots & X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{T-1} & \cdots & X_{T-p} \end{bmatrix}.$$

请说明

$$\frac{1}{T}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X} \xrightarrow{\text{a.s.}} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{T}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y} \xrightarrow{\text{a.s.}} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix},$$

从而利用 Yule-Walker 方程说明自回归系数的 OLS 估计满足一致性。

2. 考虑回归模型

$$Y_t = \boldsymbol{X}_t^\intercal\boldsymbol{\beta} + e_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

并假设 $e_t \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。

(a) 请写出 $e_t = Y_t - \boldsymbol{X}_t^\intercal\boldsymbol{\beta}$，$t = 1, \ldots, T$，的联合密度函数 $f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2|\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$，其中 $f(\cdot|\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ 表示给定数据样本 $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$，可简写为 $f(\cdot)$。

(b) 上述 $f(\cdot)$ 又称为回归模型的似然函数。请写出其对数形式 $\log f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$，并计算其导数

$$\frac{\partial \log f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \qquad \frac{\partial \log f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2}.$$

(c) 回归模型的极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$，$\hat{\sigma}^2_{ML}$ 为似然函数最大化问题的解：

$$\max_{\boldsymbol{\beta}, \sigma^2} f(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2).$$

请说明似然函数最大化问题的解，与对数似然函数最大化问题的解等价。

(d) 请求解线性回归模型的最大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$，$\hat{\sigma}^2_{ML}$，并说明 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$ 与 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ 的关系。