2019 秋季本科时间序列

第 5 次作业

提交日期：11 月 14 日

1. 考虑线性回归模型 $Y_t = \boldsymbol{X}_t^\intercal \boldsymbol{\beta} + e_t$，$t = 1, \ldots, T$，矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e},$$

其中 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \ldots, \beta_K]^\intercal$ 为 K 个解释变量的系数。

   (a) 请计算残差平方和函数 $f(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{e}^\intercal \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\intercal (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$ 最小化问题的一阶条件，即 $f(\boldsymbol{\beta})$ 的梯度向量

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \beta_K} \end{bmatrix}.$$

   请注意使用矩阵表达式（否则会比较复杂）。从一阶条件求解 $\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 估计量，需要满足什么条件？

   (b) 请计算 $f(\boldsymbol{\beta})$ 的 Hessian 矩阵

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1 \partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_K \partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_K^2} \end{bmatrix},$$

   同样请使用矩阵表达式，并说明对任意的解释变量矩阵 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{H}_f$ 都是半正定矩阵。

   (c) $\boldsymbol{X}$ 满足什么条件时，$\boldsymbol{H}_f$ 是正定矩阵？这个条件与 (a) 问中求解 OLS 估计值的条件有什么关系？

2. 沿用上问线性回归模型的设定，并假设 $\boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{X}$ 可逆。定义矩阵

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\intercal.$$

   (a) 请验证 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$。

   (b) 考虑由 $\boldsymbol{X}$ 的列向量所组成的任意向量 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{X}_1 + \cdots a_K \boldsymbol{X}_k$，其中 $\boldsymbol{X}_k$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的第 k 列，$\boldsymbol{a} = [a_1, \ldots, a_K]^\intercal \in \mathbb{R}^K$ 为一个任意的 K 维向量，请说明 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，从而说明 $\boldsymbol{X}$ 列向量张成的线性子空间 $\mathcal{X}$ 在 $\boldsymbol{P}$ 的作用下保持不变。

   (c) 给定 $\mathbb{R}^T$ 中的任意向量 $\boldsymbol{Y}$，请证明 $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$ 与 $\mathcal{X}$ 正交。由此，你证明了 $\boldsymbol{P}$ 为 $\mathbb{R}^K$ 中关于子空间 $\mathcal{X}$ 的投影矩阵。