2019 秋季本科时间序列

第 4 次作业

提交日期：11 月 7 日

1. 给定平稳时间序列 $\{X_t\}$ 及其自协方差函数 $\sigma_X^2(k)$，$k \in \mathbb{Z}$，并定义

$$Y_t = \frac{1}{1 - \frac{\mathscr{L}}{\lambda}} X_t, \quad \forall t,$$

其中 $|\lambda| > 1.$

   (a) 请计算 $\{Y_t\}$ 的自协方差函数 $\sigma_Y^2(k)$，并说明 $\{Y_t\}$ 为平稳序列。

   (b) 利用上述结论，说明 AR(p) 过程平稳性的条件为特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ 的零点 $z_1, \ldots, z_p$ 模长均大于 1。

2. 考虑课上所讲 AR(2) 过程，特征多项式为 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$，其中 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$，并记其两个特征根为 $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$。

   (a) 请写出使得 λ, η 模长大于 1 时，ϕ_1, ϕ_2 的取值范围。注意，需要考虑 λ, η 取值为实数和复数的情形。

   (b) 请说明当 $A(z)$ 满足平稳性条件时，系数矩阵（课件 6 p.18）$\boldsymbol{\Phi}$ 一定是可逆矩阵，并求解 $\sigma_X^2(k)$，$k = 0, 1, 2$，关于 $\phi_1, \phi_2, \sigma_\varepsilon^2$ 的表达式。

   (c) 假设 $\lambda \neq \eta$，请计算协方差递推公式系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   的两个特征值及特征向量（后者需进行单位化），并计算 $\boldsymbol{A}^k$ 的通项表达式。

   (d) 假设 $\lambda = \eta$，请检查此时 $\boldsymbol{A}$ 是否有两个线性无关的特征向量。若有，则 $\boldsymbol{A}^k$ 的通项表达式如上问所述；若无，则使用 Jordan 分解，写出此时 $\boldsymbol{A}^k$ 的通项表达式。