2019 秋季本科时间序列

第 4 次作业：附加内容

选做，分值 50，额外计分

提交日期：11 月 7 日

1. 给定平稳 AR(p) 过程 $A(\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$，特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ 的零点为 $z_1, \dots, z_p$。请计算 X_t 的 MA(∞) 表示

$$X_t = \frac{1}{1 - \frac{\mathscr{L}}{z_1}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{\mathscr{L}}{z_p}} \varepsilon_t$$

   的展开式中 ε_{t-1} 项的系数。

2. 假设 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 是服从某一平稳过程的 T 期样本，总体均值和方差分别为 μ, σ^2，样本均值为 $\hat{\mu}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^T X_t$，样本方差定义为

$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^T (X_t - \hat{\mu}_T)^2.$$

   请将样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 视作随机变量，计算 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_T^2$。进而说明当 $\{X_t\}$ 为 iid 样本时，$\hat{\sigma}_T^2$ 是 σ^2 的无偏估计。如果 $\{X_t\}$ 有序列相关性，$\mathbb{E}\hat{\sigma}_T^2$ 与 σ^2 的关系如何？

3. 给定平稳过程的样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$，定义样本 1-阶自协方差为

$$\hat{\sigma}_T^2(1) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^T (X_t - \hat{\mu}_T)(X_{t-1} - \hat{\mu}_T),$$

   其中 $\hat{\mu}_T$ 为样本均值。请证明 $\hat{\sigma}_T^2(1) \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2(1)$，即 $\hat{\sigma}_T^2(1)$ 是总体 1-阶自协方差的一致估计量。