2019 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：10 月 10 日

1. 假设 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\intercal$ 是一个随机向量，$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{X} = [\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n]^\intercal$ 为其均值向量，$\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ 为其协方差矩阵，其中 $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$。
   (a) 请按照定义及线性代数矩阵运算的规则，仔细验证 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^\intercal\right] = \mathbb{E}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\intercal - \mathbb{E}\boldsymbol{X}\mathbb{E}\boldsymbol{X}^\intercal$。
   (b) 给定 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 为 $m\times n$ 的常数矩阵，请写出随机向量 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的表达式，并验证 $\mathbb{E}\boldsymbol{Y} = \mathbb{E}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\boldsymbol{X}$。
   (c) 继续上问的设定，请计算 $\boldsymbol{Y}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Y}}$，将其写为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的表达式。

2. 已知 2-元随机变量 X 与 Y 的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix},$$

   相关系数 $|\rho| < 1$。
   (a) 请计算 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值，并说明其特征值为严格大于 0 的实数。
   (b) 若 $|\rho| = 1$，请说明 $\boldsymbol{\Sigma}$ 有一个特征值为 0。

3. 考虑第 3 讲课件第 9 页的示例。
   (a) 请说明如何用样本 2-阶矩 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2$ 来估计参数 a，并说明此时的参数估计值 $\hat{a}_T$ 是否满足一致性。
   (b) 将总体分布改为 $U([a,b])$，$a < b$ 为未知参数，请设计一个具体的矩估计方法，并给出参数 a, b 的矩估计表达式 $\hat{a}_T, \hat{b}_T$。

4. 已知随机向量 $[X, Y]^\intercal$ 服从 2-元正态分布 $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$，并且 $Z = X + Y$ 也服从正态分布。
   (a) 请计算 Z 的期望及方差。
   (b) 请问此时是否可以确定 Z 的密度函数？如果可以，请写出其密度函数；如果不能，请说明理由。