2019 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：9 月 26 日

1. 假设随机向量 $[X, Y]^{\intercal}$ 服从 2-元正态分布，且协方差矩阵为
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$
请证明：X 与 Y 相互独立，当且仅当 $\sigma_{xy} = 0$。

2. 假设 2-元随机变量 X 与 Y 为离散型随机变量，取值范围分别为 $\{x_1, x_2\}$ 与 $\{y_1, y_2\}$；令 $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$，则联合概率分布由矩阵 $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]$ 给出。

   (a) 若 $\boldsymbol{P}$ 有如下形式
   $$\begin{bmatrix} pq & p(1-q) \\ (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{bmatrix},$$
   其中 $0 < p, q < 1$，请证明 X 与 Y 相互独立。

   (b) 若 $\boldsymbol{P}$ 为如下一般形式
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
   其中 $0 < a, b, c, d < 1$ 且 $a + b + c + d = 1$，请证明 X 与 Y 相互独立，当且仅当 $ad = bc$。

3. 假设 1-元随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，密度函数为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$。

   (a) 请计算 $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X^2$, $\mathbb{E}X^3$。提示：使用分部积分公式。

   (b) 根据上述结果，请猜测 $\mathbb{E}X^n$ 的表达式，$n = 1, 2, \ldots$，并证明你的结论。

4. 考虑任意的 2-元随机变量 X 与 Y，方差 σ_x^2, σ_y^2 均严格为正。令 $Z = \alpha X + Y$，α 为任意实数。

   (a) 请将 var(Z) 写作 X 与 Y 的方法、协方差的表达式。

   (b) 将上述表达式写做 α 的函数，并利用 2 次函数的判别式，证明 Cauchy-Schwartz 不等式
   $$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_x \sigma_y.$$