2018 秋季本科时间序列

第 8 次作业

提交日期：1 月 11 日

1. **工具变量与内生性**——政府财政支出的乘数效应是衡量财政政策效果的关键指标之一。这一指标反映了一单位财政支出 G_t 的变动，会带来多少单位的产出 Y_t 变动。这一关系可写作回归方程

$$Y_t = \alpha + \gamma G_t + \varepsilon_t.$$

但显然，财政支出 G_t 也受当期产出 Y_t 的影响，因此 $\mathbb{E}[G_t \varepsilon_t] \neq 0$，OLS 估计的基本假设不满足。下面说明，如果存在合适的工具变量 (instrumental variable, IV)，那么仍然有希望获得财政乘数 γ 的一致估计。

(a) 如果存在变量 Z_t，满足 $\text{cov}(G_t, Z_t) \neq 0$，但 $\mathbb{E}Z_t\varepsilon_t = 0$，则称 Z_t 为内生变量 G_t 的工具变量。此时可先将 G_t 对 Z_t 进行线性回归

$$G_t = \mu + \lambda Z_t + \eta_t,$$

得到 G_t 的拟合值 $\hat{G}_t = \hat{\mu} + \hat{\lambda} Z_t$（注意：此处总是默认 $\mathbb{E}Z_t\eta_t = 0$）；该回归又称为第一阶段回归。然后再用 $\hat{G}_t$ 代换 G_t，对原回归进行 OLS 估计：

$$Y_t = \alpha + \gamma \hat{G}_t + e_t,$$

此时 $e_t = \gamma\eta_t + \varepsilon_t$，为新的残差项；该回归又称为第二阶段回归。正因为引入工具变量后，一致的参数估计是通过两步回归得到，因此工具变量回归又称为 2-阶段最小二乘回归 (2-step least square, 2SLS)。

i. 参考作业 6 的结论，说明第一阶段回归中 $\hat{\lambda} \neq 0$，故 $\hat{G}_t$ 不是常数。

ii. 请说明，第二阶段回归 OLS 估计所得 $\hat{\gamma}$ 是财政乘数 γ 的一致估计。

(b) 一般来说，寻找工具变量是一门“艺术”——找到与内生变量相关，而与原始回归残差项无关的 IV，需要想象力和运气。但在时间序列模型中，有一类虽然不完美，但比较实用的 IV，即内生变量的滞后期。在财政乘数的例子里，可以选取 G_{t-1} 作为 G_t 的 IV，原因在于时间序列变量通常具有较强的自相关性。具体而言，考虑 G_t 满足 AR(1) 方程：

$$G_t = (1-\rho)\bar{G} + \rho G_{t-1} + \zeta_t,$$

其中 ρ 表示自回归系数，$\bar{G}$ 表示 G_t 的均值，ζ_t 表示 t 时其他会影响 G_t 的冲击。选取 G_{t-1} 作为 IV 的条件是 $\mathbb{E}G_{t-1}\varepsilon_t = 0$。你认为这个假设合理吗？请写出简短的理由。

2. **联合检验**

   (a) 课件 7 联合检验的讨论中，原假设是 $H_0 : \boldsymbol{J\beta} = \mathbf{0}$ 的形式。更一般的假设是 $H_0 : \boldsymbol{J\beta} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$，此时 $\boldsymbol{b}$ 是一个非 0 向量。请写出统计量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{J}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{b}$ 此时所服从的分布，并进一步写出如何构造 Wald 统计量。

   (b) CAPM 定价公式的一种写法，是将证券 i 的预期收益率 r_i 写为其 β_i 的线性函数形式：

   $$r_i = r_f + (r_m - r_f)\beta_i,$$

   其中 r_f，$r_m - r_f$ 分别为无风险利率与市场超额收益率。上述公式写成回归方程（截面回归，而非时间序列回归）的形式为

   $$\tilde{r}_i \equiv r_i - r_f = \alpha + \gamma\beta_i + \varepsilon_i,$$

   此时 $\tilde{r}_i$ 为被解释变量，β_i 为解释变量，α，γ 为回归系数。当 CAPM 作为原假设成立时，应当有 $\alpha = 0$ 与 $\gamma = r_m - r_f$ 同时成立。沿用 (a) 中记号，构造合适的 $\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{b}$，因此来检验 CAPM 对应的联合假设

   $$H_0 : \alpha = 0, \gamma = r_m - r_f.$$

   (c) 在 (b) 的基础上，假设 ε_i 满足同方差性质，写出检验对应的 Wald 统计量 ζ，并查询其所对应的 χ^2-分布的 95% 分位数 $\bar{\zeta}_{0.95}$，作为显著性水平为 5% 的检验临界值。写出你准备在 ζ 取什么值时，拒绝原假设？

   (d) 如果 ε_i 不满足同方差假设，那么 Wald 统计量的构造有什么改变？

3. **极大似然估计**——延续课件 8 对一般线性回归模型 ML 估计的讨论

   (a) 确定残差项方差 σ_ε^2 的 ML 估计量形式。

   (b) 这一估计量与 OLS 估计时的估计量有何差别？

   (c) 结合课件中 $\boldsymbol{\beta}$ 的 ML 估计量，你认为回归模型 OLS 估计的大样本理论在 ML 估计下依然适用吗？