2018 秋季本科时间序列

第 7 次作业

提交日期：12 月 21 日

1. 假设 $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2]^\intercal$ 服从 2-元联合正态分布 $N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}^2]_{1\le i,j\le 2} = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)]_{1\le i,j\le 2}$；对应的密度函数为
$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x}\right\},$$
其中 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^\intercal$。请说明，若 $\sigma_{12}^2 = 0$，则 X_1 与 X_2 相互独立。

2. 在课件 7 标准假设下考虑回归模型
$$Y_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t = \boldsymbol{X}_t^\intercal \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T.$$
相应的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 为 OLS 估计，$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \boldsymbol{X}_t^\intercal \hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 为残差的样本估计值。

   (a) 利用 $Y_t = \boldsymbol{X}_t^\intercal \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$，说明
$$\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2 = 2\varepsilon_t \boldsymbol{X}_t^\intercal(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_T) + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_T)^\intercal \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{X}_t^\intercal (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_T)$$

   (b) 求出 $\sum_t \left(\hat{\varepsilon}_t^2 - \varepsilon_t^2\right)$ 的表达式，并说明
$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2.$$