2018 秋季本科时间序列

第 6 次作业

提交日期：11 月 30 日

1. 考虑 1-元线性回归模型：

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

残差项满足 $\mathbb{E}e_t = 0$。

   (a) 将上述模型写为矩阵形式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\theta} + \boldsymbol{e}$；写请每个矩阵（向量）的具体构成。

   (b) 请计算 $\boldsymbol{\theta}$ 的 OLS 估计值 $(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}$ 的解析表达式：首先写出 $(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}$ 的表达式（可再次使用 Cramer 法则），再求出其与 $\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{Y}$ 的乘积。最终的表达式应为 X_t, Y_t 的求和或乘积形式。

   (c) 假设 $\mathbb{E}[X_t e_t] = 0$。对两个方程

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + e_t, \quad X_t Y_t = \alpha X_t + \beta X_t^2 + X_t e_t$$

   两端分别求期望，确定 α 和 β 关于 X_t, Y_t 的矩的表达式。上问中 $\boldsymbol{\theta}$ 的 OLS 估计与这两个表达式有什么关系？

2. 考虑平稳 AR(p) 模型

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T,$$

其中 ε_t 为 iid 序列，均值为 0。

   (a) 请将上述回归模型写为向量形式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}$。

   (b) 请说明当 T 趋近于 ∞ 时，$\frac{1}{T}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X}$ 收敛到下列矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}.$$

   (c) 进一步说明，$\boldsymbol{\phi}$ 的 OLS 估计量与其 Yule-Walker 估计量一致。