2018 秋季本科时间序列

第 4 次作业

提交日期：11 月 9 日

1. 本题的目的是证明如下结论：若 $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ 绝对和收敛，即 $\sum_{i=0}^{\infty}|\theta_i| < \infty$，且 $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 为平稳序列，自协方差为 $\sigma_Y^2(k),\ k = 0, \pm1, \ldots$ 满足 $\sigma_Y^2(k) = \sigma_Y^2(-k)$，则

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i Y_{t-i}$$

为平稳序列，且自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \theta_i\theta_j\sigma_Y^2(k+i-j).$$

为此，首先证明一个辅助结论，再证明 $\mathbb{E}X_t$ 和 $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})$ 存在（亦即有限）且与时间 t 无关。

(a) 给定序列 $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ 绝对和收敛，且序列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 有界，即 $|a_i| \le \bar{a}$，则级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\theta_i$$

收敛。【提示】为证明级数 $\sum_i a_i\theta_i$ 收敛，只需说明部分和序列 $S_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\theta_i$ 收敛；为此，只需要说明 $\{S_k\}$ 是一个 Cauchy 列，即 $\forall\epsilon > 0$，可以找到 $K \in \mathbb{N}$，使得 $\forall m > n \ge K$，有 $|S_m - S_n| = |\sum_{i=n+1}^{m} a_i\theta_i| \le \epsilon$；而这一结论，又可由 $\{\theta_i\}$ 绝对和收敛与其部分和序列为 Cauchy 列等价，以及 $|a_i|$ 有界，这两个条件推知。

(b) 以 μ_Y 记平稳序列 $\{Y_t\}$ 的期望，说明

$$\mathbb{E}X_t = \mu_Y \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i$$

收敛，且 $\mathbb{E}X_t$ 与 t 无关。

(c) $\forall j \in \mathbb{N}$，请写出 $\mathrm{cov}(X_t, Y_{t-j})$ 的级数表达式，说明其收敛，并说明其与 t 无关。【提示】请利用 $|\sigma_Y^2(k)| \le \sigma_Y^2$ 这一事实，及 (a) 中结论。

(d) 在 (c) 的基础上，$\forall k \in \mathbb{N}$，写出 $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})$ 的级数表达式，说明其收敛，并说明其与 t 无关。

2.【此题为选做题，附加分为 30 分，即本次作业满分为 130 分】给定白噪声序列 $\{\varepsilon_t\}$，考虑 AR(2) 序列

$$A(\mathscr{L})X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t,$$

满足平稳性条件：$A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 的两个零点 $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$ 均位于单位圆之外，即 $|\lambda|, |\eta| > 1$。

(a) 考虑 $\lambda \neq \eta$ 的情况。首先说明此时

$$A^{-1}(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\eta}}$$

可以写为

$$A^{-1}(z) = \frac{a}{1 - \frac{z}{\lambda}} + \frac{b}{1 - \frac{z}{\eta}}.$$

求出 a, b 关于 λ, η 的表达式；再利用

$$X_t = A^{-1}(\mathscr{L})\varepsilon_t = \frac{a}{1 - \frac{\mathscr{L}}{\lambda}}\varepsilon_t + \frac{b}{1 - \frac{\mathscr{L}}{\eta}}\varepsilon_t$$

将 X_t 写为 $\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i}$ 的形式，其中 θ_i 为 λ, η 的函数；最后利用这个 MA(∞) 表示，计算 $\mathrm{var}X_t$ 关于 λ, η 的解析表达式。

(b) 下面考虑 $\lambda = \eta$ 的情况。此时，

$$A^{-1}(\mathscr{L}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathscr{L}}{\lambda}\right)^2},$$

且 (a) 中的分解不适用。作为变通，先定义 $Y_t = \frac{1}{(1-\mathscr{L}/\lambda)}\varepsilon_t$，并计算 $\sigma_Y^2(k)$；然后通过 $X_t = \frac{1}{(1-\mathscr{L}/\lambda)}Y_t$ 并利用第 1 题结果，计算 $\mathrm{var}X_t$ 关于 λ 的解析表达式。【注】类似的计算方法同样适用于 $\lambda \neq \eta$ 的情况。

(c) 将 (a)–(b) 中所得 $\sigma_X^2 = \mathrm{var}X_t$ 表达式中的 λ, η，代换为自回归系数 θ_1, θ_2，最终得到 σ_X^2 关于 θ_1, θ_2 的解析表达式。