2018 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：10 月 12 日

1. 假设 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是一个平稳序列，总体均值为 μ，方差为 σ^2，k-阶自协方差为 σ_k^2；$\{X_t\}_{t=1}^{T}$ 为一组有限样本。

   (a) 请验证样本方差的无偏估计

   $$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(X_t - \hat{\mu}_T)^2$$

   的期望满足 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_T^2 = \sigma^2$，其中 $\hat{\mu}_T$ 是样本均值。

   (b) 请说明样本方差 $\hat{\sigma}_T^2$ （有偏估计量）可写为

   $$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2 - (\hat{\mu}_T)^2.$$

   请写出样本自协方差 $\hat{\sigma}_{k,T}^2$ 的类似表达式。

   (c) 利用课上讲的定理，说明样本方差 $\hat{\sigma}_T^2$ 与样本自协方差 $\hat{\sigma}_{k,T}^2$ 是总体方差 σ^2 与总体自协方差 σ_k^2 的一致估计量 (consistent estimator)，即

   $$\lim_{T\to\infty} \hat{\sigma}_T^2 = \sigma^2, \qquad \lim_{T\to\infty} \hat{\sigma}_k^2 = \sigma_k^2.$$

2. 给定样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ 和 $\{Y_t\}_{t=1}^{T}$，请证明样本相关系数同样在 ±1 之间：

   $$-1 \le \rho_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X\hat{\sigma}_Y} \le 1.$$

3. 请利用数据包 R928.zip 中的的数据 CMTS_annual.csv，编写 R 绘图代码，复制参考文献 Chang, Chen, Waggoner & Zha (2016) 中的 fig.1 和 fig.2（该文 PDF 文件及数据说明同见课程网页-参考文献条目）；注意更新样本期到 2017 年。