武汉大学本科金融学专业 2018 秋季学期公司金融

第 4 次作业

提交日期：11 月 19 日

1. 考虑有风险的股利折现模型。假设公司每一期的股利 D_t 是随机的，且满足如下 1-阶自回归过程：
$$D_t = \rho D_{t-1} + \epsilon_t$$
其中 ϵ_t 是取值范围 $[0,\infty)$ 的 iid 随机变量，$\mathbb{E}\epsilon_t = \mu > 0$，$\mathrm{var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$。股利折现率为常数 r。
   a. 计算股利的条件期望 $\mathbb{E}_t D_{t+n} \equiv \mathbb{E}(D_{t+n}|D_t)$，$n \geq 1$。注：$D_t$ 与 ϵ_{t+n} 是相互独立的，$n \geq 1$。
   b. 定义第 t 期支付完股利 D_t 之后的股票价格为 P_t，使用期望折现股利计算 P_t 如下：
$$P_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_t D_{t+n}}{(1+r)^n}.$$
利用上问的结论，计算 P_t 作为 D_t 的函数的表达式。
   c. 假设 t 期股利为 D_t，你以股利后价格 P_t 买入股票，持有到 $t+1$，收到股利 D_{t+1} 之后又以价格 P_{t+1} 卖出。定义收益率为
$$R_{t+1} = \frac{D_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} - 1.$$
注意在 t 期已知 D_t 的条件下，D_{t+1} 和 P_{t+1} 都是随机的。计算收益率 R_{t+1} 的条件期望 $\mathbb{E}_t R_{t+1} \equiv \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)$ 以及条件方差 $\mathrm{var}_t(R_{t+1})$。注：条件方差的定义为
$$\mathrm{var}_t(R_{t+1}) = \mathbb{E}\left[\left(R_{t+1} - \mathbb{E}(R_{t+1}|D_t)\right)^2 \middle| D_t\right].$$
   d. 最后，计算随机收益率 R_{t+1} 的无条件期望 $\mathbb{E}R_{t+1}$。你能计算出无条件方差 $\mathrm{var}(R_{t+1})$ 的表达式吗？

2. 给定风险资产均值方差组合的有效前沿 $\sigma_e = \sqrt{a\mu_e^2 + b\mu_e + c}$，其中 $a > 0 > b$；无风险利率为 $r_f > 0$。假设投资者选择的风险资产组合（市场组合）为 $\boldsymbol{w}_m$，组合收益率为 $R_m = \boldsymbol{w}_m^\top \boldsymbol{R}$，均值为 $\mu_m = \mathbb{E}R_m$，方差为 $\sigma_m^2 = \mathrm{var}(R_m)$。注意，市场组合是切点组合，即其与无风险点连线与有效前沿相切。

a. 首先说明，当 $r_f < -\frac{b}{2a}$ 时，市场组合均值满足 $\mu_m > r_f$，Sharpe 比率为正。
   提示：画出有效前沿及其渐近线，再结合切点组合的性质进行说明。
b. 假设投资者的效用函数为 $U(\mu, \sigma) = \mu - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$，其中 μ, σ 为其所持有的无风险、风险资产组合 $R = (1 - w)r_f + wR_m$ 的期望与标准差。通过效用最大化，求解投资者的最优无风险、风险资产配置决策 w^*。
c. 投资者的最优风险资产配置如何随着 λ 的改变而改变？