武汉大学本科金融学专业 2018 秋季学期公司金融

第 3 次作业

提交日期：11 月 12 日

1. 考虑 n 个风险资产，随机收益率记为列向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,\dots,R_n)^\top$，期望收益率为列向量 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)^\top$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}=\left(\sigma_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$，$\sigma_{ii}$ 表示第 i 个资产收益率的方差。注意 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵，且我们总假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是<u>正定矩阵</u>，故也是<u>可逆矩阵</u>。
   a. 记资产组合权重向量为 $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top$，满足
   $$\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=w_1+\cdots+w_n=1$$
   其中 $\boldsymbol{1}_n=(1,\dots,1)^\top$ 表示全为 1 的列向量。资产组合 $R_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{R}$。请说明资产组合的期望收益为 $\mu_w=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}$，方差 $\sigma_w^2=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。
   b. 现在考虑给定资产组合期望收益 $\mu_w=\mu_e$ 时，资产组合的方差最小化问题。为推导简便起见，我们把目标函数选为 $\frac{1}{2}\sigma_w^2$（最小化该目标函数与最小化 σ_w^2 等价），权重向量 $\boldsymbol{w}$ 需要满足两个<u>约束条件</u>：$\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1$ 和 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$。因此我们把最小化问题写为：
   $$\min_{\boldsymbol{w}}\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}\quad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1\text{ 且 }\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e.$$
   其中 $\boldsymbol{w}$ 为选择变量。上述约束最小化问题对应的 Lagrangian 函数（复习或学习高数有关内容）可写为
   $$L=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}-\lambda(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n-1)-\delta(\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\mu_*),$$
   其中 λ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{1}_n=1$ 对应的乘子，δ 为约束 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\mu}=\mu_e$ 对应的乘子。有了 Lagrangian 函数之后，求解约束最小化问题就转化为求解 Lagrangian 函数的极值问题。为此，需要推导 L 关于 $\boldsymbol{w}$ 的导数。我们使用下列向量记号：
   $$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{w}}=\left(\frac{\partial F}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial w_n}\right)^\top,$$
   其中 F 为 n 个变量 $\boldsymbol{w}^\top=(w_1,\dots,w_n)$ 的函数。
      i. 当 $F=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 时，请验证 $\partial F/\partial\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$。
      注：你可以选择使用“暴力”解法，把 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$ 写为求和形式 $\sum_i\sum_j w_i\sigma_{ij}w_j$，然后计算其关于 $w_k,k=1,\dots,n$ 的偏导数。另外一种更简明的办法是定义 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}=(v_1,\dots,v_n)^\top$ 为一个列向量，并且每个元素 v_i 都是 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $v_i(\boldsymbol{w})$。如此一来 $\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{v}=w_1v_1(\boldsymbol{w})+\cdots w_nv_n(\boldsymbol{w})$，你只需要验证 (i)

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}{\partial w_k} = w_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_k} + \cdots w_n \frac{\partial v_n}{\partial w_k} + v_i$$

以及 (ii) 上式等于 $2v_i$ 即可。

ii. 当 $F = \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x}$ 而 $\boldsymbol{x}$ 为一个常数列向量时，请验证 $\partial F / \partial \boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$。

iii. 利用上述结论，验证 Lagrangian 函数的导数等于：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu}.$$

c. Lagrangian 函数的极值条件为 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{w}} = \boldsymbol{0}_n$，其中 $\boldsymbol{0}_n$ 表示一个 $n \times 1$ 的零向量。与最小化问题中的两个约束条件联立，可以得到如下 $n+2$ 个联立方程组：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} - \lambda \boldsymbol{1}_n - \delta \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}_n & (1) \\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{1}_n = 1 & (2) \\ \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_e & (3) \end{cases}$$

而其中的未知量为权重向量 $\boldsymbol{w}$（共 n 个未知量）以及两个乘子 λ 和 δ，共计 $n+2$ 个未知量。求解该方程，可以得到有效组合权重向量 $\boldsymbol{w}_e$。步骤如下：

i. 说明 (1) 可重写为

$$\lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n + \delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{w}.$$

ii. 先将上式左乘 $\boldsymbol{1}_n^\top$，再将上式左乘 $\boldsymbol{\mu}^\top$，说明你将得到如下形式的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_e \end{bmatrix}, \tag{4}$$

并给出 A, B, C 的表达式，并说明 $A, C > 0$。注：$A, C > 0$ 需要用到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定矩阵这一事实（正定矩阵的逆矩阵是不是正定矩阵？）。

iii. 求解二元线性方程组 (4)，说明方程的解 λ_e, δ_e 是 μ_e 的线性函数。注：你可以使用 Cramer 法则求 (4) 中系数矩阵的逆。

iv. 最优权重可以写为 $\boldsymbol{w}_e = \lambda_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{1}_n + \delta_e \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$。据此说明

$$\sigma_e^2 = \boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}_e = A\lambda_e^2 + 2B\lambda_e \delta_e + C\delta_e^2,$$

其中 A, B, C 为 (4) 式对应的表达式。进一步说明，给定期望收益率 μ_e 所对应的最小方差组合 $\boldsymbol{w}_e^\top \boldsymbol{R}$ 的方差 σ_e^2 是 μ_e 的二次函数：

$$\sigma_e^2 = a\mu_e^2 + b\mu_e + c, \tag{5}$$

二次曲线 (μ_e, σ_e) 就是 n 个资产组合可行集的边界。

d. 请求出 (5) 式中 a, b, c 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式；并说明且 $a > 0$。

e. 请说明有效组合 (μ_e, σ_e) 构成双曲线的一支，并求出其两条渐近线的表达式。

f. 基于 (5) 式，求出最小方差点 (μ_m, σ_m) 关于 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式。

g. 假设无风险资产利率 $r_f < \mu_m$。请计算最优风险资产组合 (μ_*, σ_*) 的表达式。注意最优风险资产组合的确定条件：(μ_*, σ_*) 与 $(r_f, 0)$ 连线与有效前沿相切。

h. 请将 (μ_*, σ_*) 表示为 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ 等参数的表达式。