2024 秋季本科时间序列

第 7 次作业答案

11 月 23 日

1. (a) 首先考虑该 VAR(1) 过程的平稳性，求解 $\det(\boldsymbol{\Phi} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ 得矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征值 $\lambda_1 = \frac{3}{5}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$，因为 $\lambda_i < 1 \forall i = 1, 2$，所以该 VAR(1) 序列为平稳序列，即 $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{X}_t = \mathbb{E}\boldsymbol{X}_{t-1}$，对 VAR(1) 过程等式两边同时取期望得

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\mu}$$
$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{c}$$

其中，$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 6.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) 可将 $\boldsymbol{X}_t$ 展开为 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$(由 (a) 可知 $\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\mu}$)，所以

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\boldsymbol{X}_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}^\intercal) \boldsymbol{\Phi}^{j\intercal} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{I} \boldsymbol{\Phi}^{j\intercal} \end{aligned}$$

由 (a) 可知矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \frac{3}{5}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$，易得对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1 = (1, -1)^\intercal, \boldsymbol{x}_2 = (2, -1)^\intercal$，所以有 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，所以

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}^j &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}^j\boldsymbol{C}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6^j & 0 \\ 0 & 0.5^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.6^j + 2 \cdot 0.5^j & -2 \cdot 0.6^j + 2 \cdot 0.5^j \\ 0.6^j - 0.5^j & 2 \cdot 0.6^j - 0.5^j \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(\boldsymbol{X}_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -0.6^j + 2 \cdot 0.5^j & -2 \cdot 0.6^j + 2 \cdot 0.5^j \\ 0.6^j - 0.5^j & 2 \cdot 0.6^j - 0.5^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6^j + 2 \cdot 0.5^j & -2 \cdot 0.6^j + 2 \cdot 0.5^j \\ 0.6^j - 0.5^j & 2 \cdot 0.6^j - 0.5^j \end{bmatrix}^\intercal \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 5 \cdot 0.6^{2j} - 12 \cdot 0.6^j \cdot 0.5^j + 8 \cdot 0.5^{2j} & -5 \cdot 0.6^{2j} + 9 \cdot 0.6^j \cdot 0.5^j - 4 \cdot 0.5^{2j} \\ -5 \cdot 0.6^{2j} + 9 \cdot 0.6^j \cdot 0.5^j - 4 \cdot 0.5^{2j} & 5 \cdot 0.6^{2j} - 6 \cdot 0.6^j \cdot 0.5^j + 2 \cdot 0.5^{2j} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \cdot \frac{1}{1-0.36} - 12 \cdot \frac{1}{1-0.3} + 8 \cdot \frac{1}{1-0.25} & -5 \cdot \frac{1}{1-0.36} + 9 \cdot \frac{1}{1-0.3} - 4 \cdot \frac{1}{1-0.25} \\ -5 \cdot \frac{1}{1-0.36} + 9 \cdot \frac{1}{1-0.3} - 4 \cdot \frac{1}{1-0.25} & 5 \cdot \frac{1}{1-0.36} - 6 \cdot \frac{1}{1-0.3} + 2 \cdot \frac{1}{1-0.25} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{449}{336} & \frac{-97}{336} \\ \frac{-97}{336} & \frac{641}{336} \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} 1.336 & -0.289 \\ -0.289 & 1.908 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(c) 已知 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$，利用协方差的对称双线性有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{X}_{t-k}) &= \operatorname{cov}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{X}_{t-k}) \\
&= \mathbb{E}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{X}_{t-k} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Phi}\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}_{t-1}, \boldsymbol{X}_{t-k}) + \mathbb{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t - 0)(\boldsymbol{X}_{t-k} - \boldsymbol{\mu}) \\
&= \boldsymbol{\Phi}\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}_{t-1}, \boldsymbol{X}_{t-k}) = \cdots = \boldsymbol{\Phi}^k\operatorname{cov}(\boldsymbol{X}_{t-k}, \boldsymbol{X}_{t-k}) \\
&= \boldsymbol{\Phi}^k\operatorname{var}(\boldsymbol{X}_t) \\
&= \begin{bmatrix} -0.6^k + 2\cdot 0.5^k & -2\cdot 0.6^k + 2\cdot 0.5^k \\ 0.6^k - 0.5^k & 2\cdot 0.6^k - 0.5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{449}{336} & \frac{-97}{336} \\ \frac{-97}{336} & \frac{641}{336} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{85}{112}\cdot 0.6^k + \frac{44}{21}\cdot 0.5^k & -\frac{395}{112}\cdot 0.6^k + \frac{68}{21}\cdot 0.5^k \\ \frac{85}{112}\cdot 0.6^k - \frac{22}{21}\cdot 0.5^k & \frac{395}{112}\cdot 0.6^k - \frac{34}{21}\cdot 0.5^k \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.（1）推导 $\boldsymbol{J}_m^n$ 的通项表达式：

给定 m 阶若当块 $\boldsymbol{J}_m$：

$$
\boldsymbol{J}_m = \lambda\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{N}
$$

其中, $\boldsymbol{N}$ 是一个上三角矩阵, 其主对角线以上的第一个对角线全为 1, 其余元素为 0, 即:

$$
\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

且 $\boldsymbol{N}^m = 0$，因为 $\boldsymbol{N}$ 是一个幂零指数为 m 的幂零矩阵。

计算 $\boldsymbol{J}_m^n = (\lambda\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{N})^n$：利用二项式定理，有：

$$
\boldsymbol{J}_m^n = (\lambda\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{N})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k}\boldsymbol{N}^k
$$

由于 $\boldsymbol{N}^m = 0$，所以当 $k \geq m$ 时，$\boldsymbol{N}^k = 0$。因此，上式可以简化为：

$$\boldsymbol{J}_m^n = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} \boldsymbol{N}^k$$

求矩阵 $\boldsymbol{N}^k$ 的元素表达式：由于 $\boldsymbol{N}$ 的结构是上移 k 位的操作，$\boldsymbol{N}^k$ 将主对角线以上的第 k 条对角线元素为 1，其余为 0。具体来说，$\boldsymbol{N}^k$ 的元素为：

$$(\boldsymbol{N}^k)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if} j - i = k \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

因此，$\boldsymbol{J}_m^n$ 的元素为：

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{J}_m^n)_{i,j} &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} (\boldsymbol{N}^k)_{i,j} \\ &= \begin{cases} \binom{n}{j-i} \lambda^{n-(j-i)}, & 0 \leq j - i \leq m - 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

因此：

$$(\boldsymbol{J}_m^n)_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{n}{j-i} \lambda^{n-(j-i)}, & \text{if} 0 \leq j - i \leq m - 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

（2）当 $|\lambda| < 1$ 时，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{J}_m^n = 0_{m\times m}$：

对于矩阵 $\boldsymbol{J}_m^n$ 的任意元素，当 $0 \leq j - i \leq m - 1$ 时，有：

$$\left|(\boldsymbol{J}_m^n)_{i,j}\right| = \left|\binom{n}{j-i} \lambda^{n-(j-i)}\right|$$

注意到当 $n \to \infty$ 时，$\binom{n}{j-i}$ 是关于 n 的多项式增长（其阶为 $j - i$），而 $|\lambda|^{n-(j-i)}$ 是指数衰减（因为 $|\lambda| < 1$）。因此，两者相乘的结果将趋于 0。

具体来说，由于多项式的增长速度远小于指数函数的衰减速度，因此：

$$\lim_{n\to\infty}\left|(J_m^n)_{i,j}\right| = 0$$

对于所有的 i,j，因此：

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{J}_m^n = 0_{m\times m}$$

综上所述，$\boldsymbol{J}_m^n$ 的通项表达式为：

$$(J_m^n)_{i,j} = \begin{cases} \binom{n}{j-i}\lambda^{n-(j-i)}, & \text{当}0 \le j-i \le m-1 \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

当 $|\lambda| < 1$ 时，由于 $\lambda^{n-(j-i)}$ 趋于零，故有：

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{J}_m^n = 0_{m\times m}$$