2024 秋季本科时间序列

第 3 次作业答案

10 月 16 日

1. (a) 对于白噪声过程 $\{\epsilon_t\}$，其方差为 $\sigma_\epsilon^2 > 0$，其自协方差函数为：

$$\gamma_\epsilon(k) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

根据谱密度函数的定义，其表达式为：

$$s_\epsilon(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_\epsilon(k) e^{-i2\pi\omega k} = \sigma_\epsilon^2.$$

除了 $k = 0$ 时的自协方差 $\gamma_\epsilon(0) = \sigma_\epsilon^2$ 之外，其他所有的 $\gamma_\epsilon(k)$ 都为 0，所以谱密度函数为常数 σ_ϵ^2：

$$s_\epsilon(\omega) = \sigma_\epsilon^2.$$

(b) 已知平稳过程 $\{X_t\}$ 的谱密度函数为常数 $s_X(\omega) \equiv c > 0$，根据谱密度函数与自协方差函数的关系，自协方差函数 $\gamma_X(k)$ 为：

$$\gamma_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} s_X(\omega) e^{i2\pi k\omega} d\omega.$$

因为 $s_X(\omega) = c$，所以积分结果为：

$$\gamma_X(k) = c \int_{-1/2}^{1/2} e^{i2\pi k\omega} d\omega.$$

对于 $k = 0$，积分结果为：

$$\gamma_X(0) = c,$$

对于 $k \neq 0$，由于指数函数在 $[-1/2, 1/2]$ 上的积分为零，所以：

$$\gamma_X(k) = 0.$$

因此，自协方差函数为：

$$\gamma_X(k) = \begin{cases} c, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

这表明 $\{X_t\}$ 是白噪声过程。

(c) 对于给定的平稳 ARMA(p, q) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_t$，其中 ϵ_t 为方差为 σ_ϵ^2 的白噪声，且 $\theta_0 = 1$，其谱密度函数 $s_X(\omega)$ 的表达式为：

$$s_X(\omega) = \sigma_\epsilon^2 \cdot \frac{|B(e^{-i2\pi\omega})|^2}{|A(e^{-i2\pi\omega})|^2},$$

其中

$$B(e^{-i2\pi\omega}) = 1 + \theta_1 e^{-i2\pi\omega} + \theta_2 e^{-i4\pi\omega} + \cdots + \theta_q e^{-i2q\pi\omega},$$

$$A(e^{-i2\pi\omega}) = 1 - \phi_1 e^{-i2\pi\omega} - \phi_2 e^{-i4\pi\omega} - \cdots - \phi_p e^{-i2p\pi\omega}.$$

使用延迟算子 L 来表示 ARMA 过程为：

$$\phi(L) X_t = \theta(L) \epsilon_t,$$

其中

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p,$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \cdots + \theta_q L^q.$$

在这种表示下，谱密度函数 $s_X(\omega)$ 也可以写成：

$$s_X(\omega) = \sigma_\epsilon^2 \cdot \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2},$$

其中

$$\theta(e^{-i\omega}) = 1 + \theta_1 e^{-i\omega} + \cdots + \theta_q e^{-iq\omega},$$

$$\phi(e^{-i\omega}) = 1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \cdots - \phi_p e^{-ip\omega}.$$

(d) i. AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t$ 的谱密度函数为：

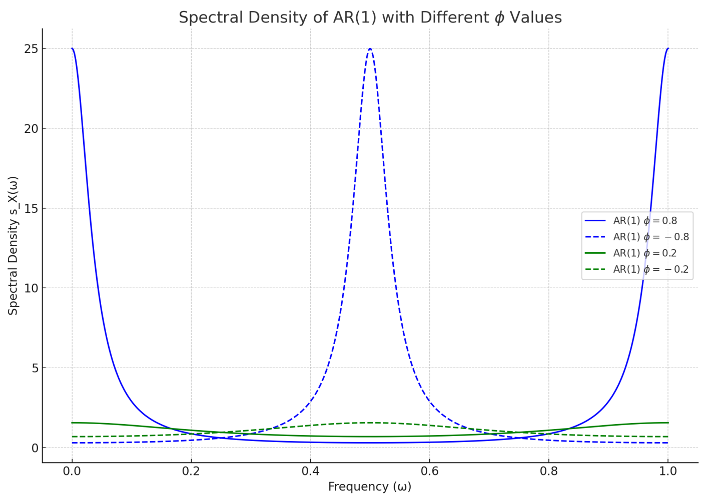
$$s_X(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - \phi e^{-i2\pi\omega}|^2} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi\omega) + \phi^2}$$

A. 参数 ϕ 的正负与谱密度峰值位置的关系：

- 当 $\phi > 0$ 时，谱密度函数在 $\omega = 0$ 处达到最大值，表示低频成分占主导。
- 当 $\phi < 0$ 时，谱密度函数在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到最大值，表示高频成分占主导。

B. 参数 ϕ 的绝对值大小与谱密度峰值形状的关系：

- 当 $|\phi|$ 增大（但小于 1），分母 $D(\omega)$ 的变化幅度增大。
- 对于 $\phi > 0$，$|\phi|$ 越接近 1，$D(0) = (1-\phi)^2$ 越接近 0，谱密度函数在 $\omega = 0$ 处的峰值越尖锐，说明低频成分更强。
- 对于 $\phi < 0$，$|\phi|$ 越接近 1，$D(\pi) = (1+\phi)^2$ 越接近 0，谱密度函数在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处的峰值越尖锐，说明高频成分更强。



ii. MA(1) 过程 $X_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ 的谱密度函数为：

$$s_X(\omega) = \sigma_\epsilon^2|1 + \theta e^{-i2\pi\omega}|^2 = \sigma_\epsilon^2(1 + 2\theta\cos(2\pi\omega) + \theta^2)$$

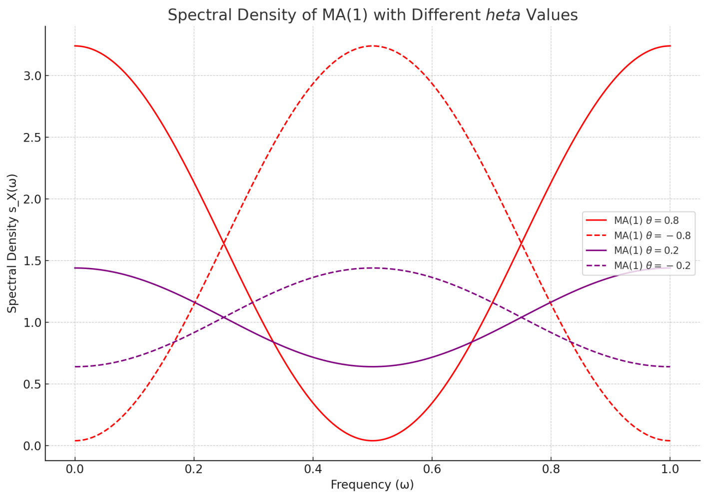
A. 参数 θ 的正负与谱密度峰值位置的关系：

- 当 $\theta > 0$ 时，谱密度函数在 $\omega = 0$ 处达到最大值，低频成分占主导。

- 当 $\theta < 0$ 时，谱密度函数在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到最大值，高频成分占主导。

B. 参数 θ 的绝对值大小与谱密度峰值形状的关系：

- 当 $|\theta|$ 增大时，$2\theta\cos(2\pi\omega)$ 项的影响增大。
- 对于 $\theta > 0$，$|\theta|$ 越大，$s_{MA(1)}(0)$ 越大，谱密度函数在 $\omega = 0$ 处的峰值越高，低频成分更强。
- 对于 $\theta < 0$，$|\theta|$ 越大，$s_{MA(1)}(\frac{1}{2})$ 越大，谱密度函数在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处的峰值越高，高频成分更强。



iii. ARMA(1,1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}$ 的谱密度函数为：

$$s_X(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2|1+\theta e^{-i2\pi\omega}|^2}{|1-\phi e^{-i2\pi\omega}|^2} = \frac{\sigma_\epsilon^2(1+2\theta\cos(2\pi\omega)+\theta^2)}{1-2\phi\cos(2\pi\omega)+\phi^2}$$

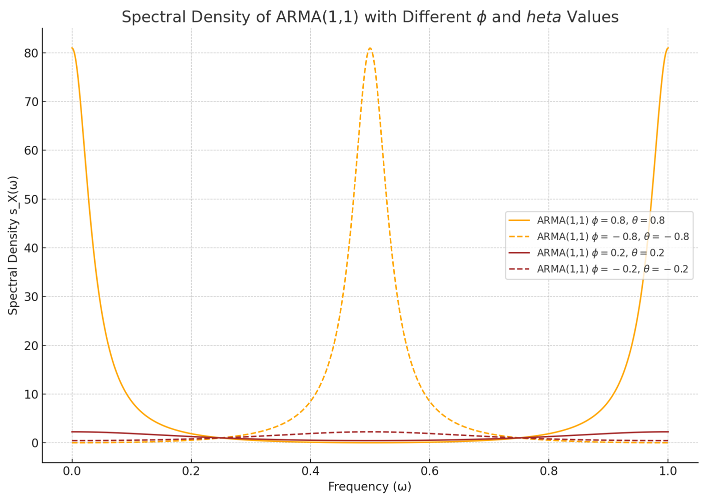
A. 参数 ϕ 和 θ 的正负与谱密度峰值位置的关系：

- 当 ϕ 和 θ 同号时：
  - 若 $\phi > 0$ 且 $\theta > 0$：分子在 $\omega = 0$ 处达到最大值，分母在 $\omega = 0$ 处达到最小值，谱密度函数在 $\omega = 0$ 处达到峰值，低频成分占主导。
  - 若 $\phi < 0$ 且 $\theta < 0$：分子在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到最大值，分母在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到最小值，谱密度函数在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到峰值，高频成分占主导。
- 当 ϕ 和 θ 异号时：

- 分子和分母的峰值位置不一致，导致谱密度函数的峰值位置不明显，可能较为平坦。
- 例如，若 $\phi > 0$ 且 $\theta < 0$：分子在 $\omega = \frac{1}{2}$ 处达到最大值，分母在 $\omega = 0$ 处达到最小值，谱密度函数在 ω 上变化较为平缓，峰值不明显。

B. 参数 ϕ 和 θ 的绝对值大小与谱密度峰值形状的关系：

- 当 $|\phi|$ 和 $|\theta|$ 增大时：
  - 若 ϕ 和 θ 同号且绝对值接近 1，谱密度函数在对应频率处的峰值更尖锐。
  - 若 ϕ 和 θ 异号且绝对值增大，谱密度函数可能更加平缓。



2. (a) 自协方差函数定义为

$$\gamma(k) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k})$$

由于 ε_t 和 ε_{t-1} 相互独立，且 $\mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = 1$，所以

$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \theta^2\,\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = 1 + \theta^2 \times 1 = 1 + \theta^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}) \\
&= \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) + \theta\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) + \theta\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \theta^2\,\mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}) \\
&= 0 + 0 + \theta + 0 = \theta
\end{aligned}$$

(b)

$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(\eta_t) + \theta^2\,\mathrm{Var}(\eta_{t-1}) = 1/\theta^2 + 1/\theta^2 \times 1/\theta^2 = \frac{1+\theta^2}{\theta^4}$$

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\eta_t + (1/\theta)\eta_{t-1}, \eta_{t-1} + (1/\theta)\eta_{t-2}) \\ &= \frac{1}{\theta}\,\mathrm{Cov}(\eta_{t-1}, \eta_{t-1}) = 1/\theta^3\end{aligned}$$

（注意到此时 $\gamma(k)$ 变为 2(a) 中的 $1/\theta^4$，不能说明可等价改写，题干条件为 $\sigma_\eta^2 = \theta^2$ 时才可等价改写，此笔误不影响后两问解答）

(c)

$$\begin{aligned}\eta_t &= \left(1 + \frac{1}{\theta}\mathscr{L}\right)^{-1}(1+\theta\mathscr{L})\varepsilon_t \\ &= \theta\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{1+\theta\mathscr{L}^{-1}}(1+\theta\mathscr{L})\varepsilon_t \\ &= \theta\mathscr{L}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k\mathscr{L}^{-k}\right)(1+\theta\mathscr{L})\varepsilon_t \\ &= \theta\mathscr{L}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k\mathscr{L}^{-k}\right)(\varepsilon_t + \theta\mathscr{L}\varepsilon_t)\end{aligned}$$

注意到 $\mathscr{L}^{-1}\mathscr{L} = 1$，$\mathscr{L}^{-1}\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1}$，$\mathscr{L}^{-k}\varepsilon_t = \varepsilon_{t+k}$

$$\eta_t = \theta\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k\left(\varepsilon_{t+1+k} + \theta\varepsilon_{t+k}\right).$$

(d)

$$S_\varepsilon(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma(k)e^{-i2\pi\omega k} = \gamma(0) = 1$$

由 2(c) 可知 $\eta_t = \theta\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{1+\theta\mathscr{L}^{-1}}(1+\theta\mathscr{L})\varepsilon_t = A(\mathscr{L})\varepsilon_t$，所以

$$\begin{aligned}S_\eta(\omega) &= A(e^{-i2\pi\omega})A(e^{i2\pi\omega})S_\varepsilon(\omega) \\ &= \theta(e^{-i2\pi\omega})^{-1}\frac{1}{1+\theta(e^{-i2\pi\omega})^{-1}}(1+\theta e^{-i2\pi\omega}) \times \theta(e^{i2\pi\omega})^{-1}\frac{1}{1+\theta(e^{i2\pi\omega})^{-1}}(1+\theta e^{i2\pi\omega}) \\ &= \theta^2\end{aligned}$$

即 $S_\eta(\omega)$ 为常数，由 1(b) 可知 η_t 为白噪声

3. (a) 解：特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 两个零点 z_1, z_2 模长均大于 1，即时间序列平稳，

$AR(2)$ 过程 $(1-\phi_1\mathscr{L}-\phi_2\mathscr{L}^2)X_t=\epsilon_t$ 特征多项式 $1-\phi_1x-\phi_2x^2=0$，则有两特征根 x_1,x_2:

$$x_{1,2}=\frac{\phi_1\pm\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{-2\phi_2}$$

若使得 $AR(2)$ 过程平稳则 $|x_1|>1,|x_2|>1$, 记特征根的倒数为 z_1,z_2:

$$z_1=\frac{1}{2}(\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}),z_2=\frac{1}{2}(\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2})$$

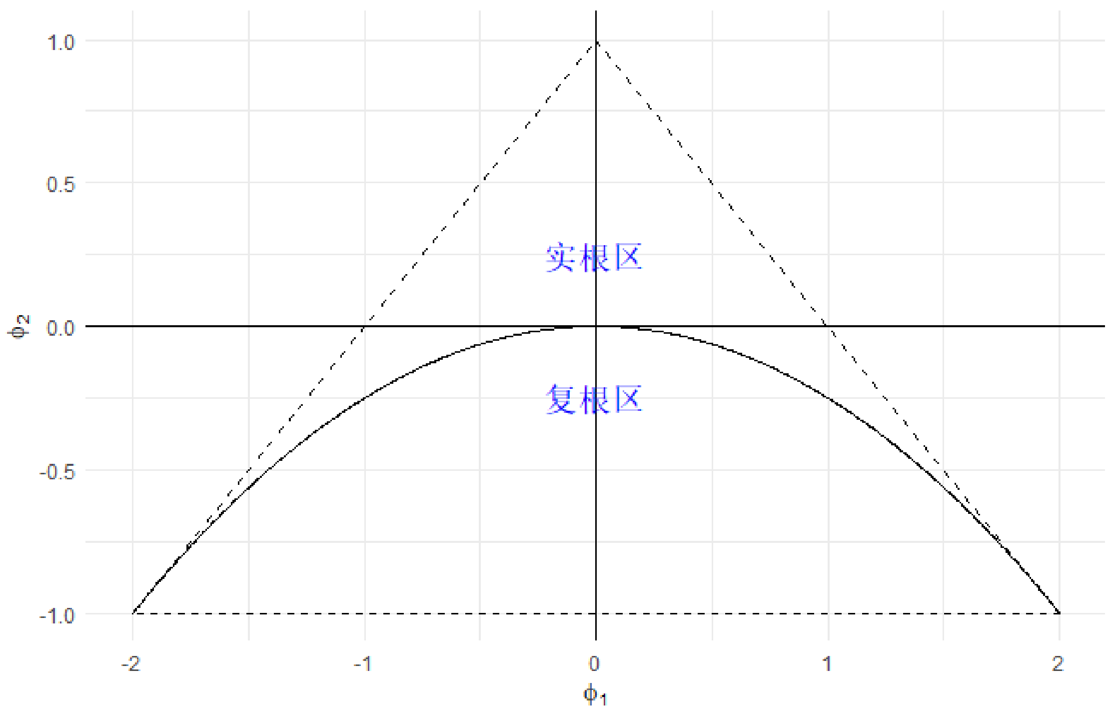
i. 当 $\phi_1^2+4\phi_2\geq 0$ 时为实根，由于 $|z_1|<1,|z_2|<1$，则有 $-1<z_1<z_2<1$，即:

$$\phi_1+\phi_2<1,\phi_2-\phi_1<1$$

ii. 当根为复数根时，$|z_1|=|z_2|<1$，即:

$$|z_1|^2=\frac{\phi_1^2+(-\phi_1^2-4\phi_2)}{4}=-\phi_2>1\Rightarrow\phi_2>-1,\phi_1^2+4\phi_2<0$$

因此，使得 X_t 为平稳过程的自回归系数取值范围 $(\phi_1,\phi_2)\in\mathbb{R}^2$ 的图示如下:



(b) 若 AR(2) 过程平稳，则系数矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 的行列式非 0，矩阵可逆，

$$\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2-1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{vmatrix} = (\phi_1+\phi_2-1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+1) \neq 0$$

即为：

$$\begin{cases} \phi_1+\phi_2-1 \neq 0 \\ \phi_2-\phi_1-1 \neq 0 \\ \phi_2+1 \neq 0 \end{cases}$$

下面使用 Cramer 法则求逆：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi}\Phi^*$$

由于

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2-1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix}$$

则有：

$$\Phi_{11} = \begin{vmatrix} \phi_1 & -1 \\ -\phi_1 & -\phi_2 \end{vmatrix} = -\phi_1\phi_2 - \phi_1, \Phi_{12} = -\begin{vmatrix} \phi_2 & -1 \\ 1 & -\phi_2 \end{vmatrix} = \phi_2^2 - 1, \Phi_{13} = \begin{vmatrix} \phi_2 & \phi_1 \\ 1 & -\phi_1 \end{vmatrix} = -\phi_1\phi_2 - \phi_1$$

$$\Phi_{21} = -\begin{vmatrix} \phi_2-1 & 0 \\ -\phi_1 & -\phi_2 \end{vmatrix} = \phi_2^2 - \phi_2, \Phi_{22} = \begin{vmatrix} \phi_1 & 0 \\ 1 & -\phi_2 \end{vmatrix} = -\phi_1\phi_2, \Phi_{23} = -\begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2-1 \\ 1 & -\phi_1 \end{vmatrix} = \phi_1^2 + \phi_2 - 1$$

$$\Phi_{31} = \begin{vmatrix} \phi_2-1 & 0 \\ \phi_1 & -1 \end{vmatrix} = -\phi_2 + 1, \Phi_{32} = -\begin{vmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & -1 \end{vmatrix} = \phi_1, \Phi_{33} = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2-1 \\ \phi_2 & \phi_1 \end{vmatrix} = \phi_1^2 - \phi_2^2 + \phi_2$$

故矩阵的逆为：

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{|\Phi|}\Phi^* = \frac{1}{(\phi_1+\phi_2-1)(\phi_2-\phi_1-1)(\phi_2+1)} \begin{bmatrix} -\phi_1\phi_2-\phi_1 & \phi_2^2-\phi_2 & -\phi_2+1 \\ \phi_2^2-1 & -\phi_1\phi_2 & \phi_1 \\ -\phi_1\phi_2-\phi_1 & \phi_1^2+\phi_2-1 & \phi_1^2-\phi_2^2+\phi_2 \end{bmatrix}$$

(c) 考虑 AR(2) 过程：

$$X_t = 0.7X_{t-1} - 0.1X_{t-2} + \epsilon_t,$$

其中 ϵ_t 是方差为 $\sigma_\epsilon^2 = 1$ 的白噪声过程。

首先，在等式两边分别乘以 X_t、X_{t-1}、X_{t-2} 并取期望，得到以下自协方差方程：

$$\gamma(0) = 0.7\gamma(1) - 0.1\gamma(2) + \sigma_\epsilon^2,$$

$$\gamma(1) = 0.7\gamma(0) - 0.1\gamma(1),$$

$$\gamma(2) = 0.7\gamma(1) - 0.1\gamma(0).$$

简化第二个方程：

$$\gamma(1) + 0.1\gamma(1) = 0.7\gamma(0) \implies 1.1\gamma(1) = 0.7\gamma(0) \implies \gamma(1) = \frac{0.7}{1.1}\gamma(0).$$

简化第三个方程，利用 $\gamma(1)$ 的表达式：

$$\gamma(2) = 0.7\gamma(1) - 0.1\gamma(0) = 0.7\left(\frac{0.7}{1.1}\gamma(0)\right) - 0.1\gamma(0) = \left(\frac{0.49}{1.1} - 0.1\right)\gamma(0) = \frac{19}{55}\gamma(0).$$

将 $\gamma(1)$ 和 $\gamma(2)$ 代入第一个方程：

$$\gamma(0) = 0.7\gamma(1) - 0.1\gamma(2) + 1 = 0.7\left(\frac{0.7}{1.1}\gamma(0)\right) - 0.1\left(\frac{19}{55}\gamma(0)\right) + 1.$$

计算并整理：

$$\gamma(0) = \left(\frac{49}{110} - \frac{19}{550}\right)\gamma(0) + 1 = \left(\frac{113}{275}\gamma(0)\right) + 1.$$

解方程求 $\gamma(0)$：

$$\gamma(0) - \frac{113}{275}\gamma(0) = 1 \implies \left(1 - \frac{113}{275}\right)\gamma(0) = 1 \implies \frac{162}{275}\gamma(0) = 1 \implies \gamma(0) = \frac{275}{162}.$$

计算 $\gamma(1)$ 和 $\gamma(2)$：

$$\gamma(1) = \frac{0.7}{1.1}\gamma(0) = \frac{7}{11}\times\frac{275}{162} = \frac{1925}{1782} = \frac{175}{162}, \gamma(2) = \frac{19}{55}\gamma(0) = \frac{19}{55}\times\frac{275}{162} = \frac{5225}{8910} = \frac{95}{162}.$$

接下来，利用递推关系：

$$\gamma(k) = 0.7\gamma(k-1) - 0.1\gamma(k-2).$$

将其写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \gamma(k) \\ \gamma(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma(k-1) \\ \gamma(k-2) \end{bmatrix}.$$

求特征值：

$$\det(\lambda I - \Lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.7 & 0.1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = 0.$$

解得特征值：

$$\lambda_1 = 0.5, \quad \lambda_2 = 0.2.$$

因此，自协方差的通解为：

$$\gamma(k) = c_1(0.5)^k + c_2(0.2)^k.$$

利用初始条件 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 求解 c_1 和 c_2：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \gamma(0) = \dfrac{275}{162}, \\ 0.5c_1 + 0.2c_2 = \gamma(1) = \dfrac{175}{162}. \end{cases}$$

解得：

$$c_1 = \frac{200}{81}, \quad c_2 = -\frac{125}{162}.$$

因此，自协方差函数的通项表达式为：

$$\gamma(k) = \frac{200}{81}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{125}{162}\left(\frac{1}{5}\right)^k.$$

将其进一步简化：

$$\gamma(k) = \frac{25}{81}\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^k - 5\left(\frac{1}{5}\right)^k\right).$$