2024 秋季本科时间序列

第 2 次作业答案

10 月 7 日

1. 证明：

我们需要证明：当系数序列 $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 平方可和，即满足 $\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j^2 < \infty$ 时，线性序列

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j}$$

是协方差平稳序列，其中 $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是白噪声过程。

证明过程如下：

（1）均值恒定且有限：

计算 X_t 的数学期望：

$$\begin{aligned}
E[X_t] &= E\left[\mu + \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j\varepsilon_{t-j}\right] \\
&= \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j E[\varepsilon_{t-j}] \\
&= \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\phi_j \times 0 \quad (\text{因为} E[\varepsilon_{t-j}] = 0) \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

因此，$E[X_t] = \mu$ 为常数，与时间 t 无关。

（2）方差恒定且有限：

计算 X_t 的方差：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_t) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}\right) \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}\right)^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}\right]\right)^2 \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}\right)^2\right] \quad \text{(因为均值为零)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_j \phi_k \mathrm{E}[\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-k}].
\end{aligned}
$$

由于 $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声过程，满足：

$$
\mathrm{E}[\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-k}] = \begin{cases} \sigma^2, & \text{当} j = k, \\ 0, & \text{当} j \neq k. \end{cases}
$$

因此，

$$
\mathrm{Var}(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2.
$$

由于 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$，所以 $\mathrm{Var}(X_t)$ 有限且与 t 无关。

（3）自协方差函数仅与时差有关且有限：

计算自协方差函数 $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$：

$$
\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \varepsilon_{t+h-k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_j \phi_k \mathrm{E}[\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k}] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_j \phi_k \gamma_\varepsilon(h + j - k),
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma_\varepsilon(h)$ 是白噪声过程的自协方差函数，满足：

$$
\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{当} h = 0, \\ 0, & \text{当} h \neq 0. \end{cases}
$$

因此，只有当 $k = j + h$ 时，$\mathrm{E}[\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+h-k}] \neq 0$。于是：

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \phi_{j+h}.$$

由于 $\{\phi_j\}$ 平方可和，根据 Cauchy-Schwarz 不等式，级数 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \phi_{j+h}$ 绝对收敛。因此，对任意 h，$\gamma(h)$ 有限且仅与时差 h 有关。

因此，线性序列 $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$ 是协方差平稳序列。

2. (a) 给定大于等于 $|z|$ 的正整数 M

$$\begin{aligned}
|e^z| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \sum_{n=M}^{\infty} \frac{M^M}{M!} \left(\frac{M}{M+1} \right)^{n-M} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \frac{M^M}{M!} \frac{1}{\sum_{n=M}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{n-M}} \\
&\leq \sum_{n=0}^{M-1} \frac{M^n}{n!} + \frac{M^M}{M!} < \infty
\end{aligned}$$

(b) 定义复数 z 的正余弦函数：

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

利用 (a) 中的定义, 可得：

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2} e^{iz} + \frac{1}{2} e^{-iz} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} - \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots
\end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{1}{2i}e^{iz} - \frac{1}{2i}e^{-iz} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \frac{i}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots .
\end{aligned}$$

可以发现与 $\mathbb{R}$ 上的 Taylor 级数一致。

(c) 利用 (b) 中的定义，$\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} + i\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = e^{iz}.$$

特别的，取 $z = \theta \in \mathbb{R}$ ，有 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ，该式对 $\forall\theta \in \mathbb{R}$ 成立。

(d) 对于复数形如 $z = a + ib$, 可得幅角 $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

由 (c) 知：$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由于 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

故 $|z|e^{i\theta} = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = a + ib = z$

(e) 已知 $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$, $e^{i(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$,

且 $e^{i\theta}e^{i\phi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i\cos\theta\sin\phi + i\sin\theta\cos\phi$

因此, $\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i\cos\theta\sin\phi + i\sin\theta\cos\phi$ 由复数相等性质可知: $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$, $\quad \sin(\theta+\phi) = \cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi$.

3. 解答:

(i) 计算 X_t 的期望 $\mathrm{E}[X_t]$：由于 U 与 t 无关，且在 $[-\pi,\pi]$ 上均匀分布，我们有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_t] &= \mathrm{E}[\cos(\pi t + U)] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\pi t + u) \cdot \frac{1}{2\pi}\, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\pi t + u)\, du.
\end{aligned}
$$

由于积分变量 u 在一个完整周期上变化，且 cos 函数在一个周期上的积分为零，所以：

$$
\mathrm{E}[X_t] = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 = 0.
$$

因此，X_t 的期望为零：

$$
\mathrm{E}[X_t] = 0.
$$

(ii) 计算自协方差函数 $\gamma(k)$：

自协方差函数定义为：

$$
\gamma(k) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \mathrm{E}[X_t X_{t+k}] - (\mathrm{E}[X_t])^2.
$$

由于 $\mathrm{E}[X_t] = 0$，所以：

$$
\gamma(k) = \mathrm{E}[X_t X_{t+k}].
$$

计算 $\mathrm{E}[X_t X_{t+k}]$：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_t X_{t+k}] &= \mathrm{E}[\cos(\pi t + U) \cdot \cos(\pi(t + k) + U)] \\
&= \mathrm{E}[\cos(\pi t + U) \cdot \cos(\pi t + \pi k + U)].
\end{aligned}
$$

利用三角恒等式：

$$
\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)].
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_t X_{t+k}] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left[\cos((\pi t + U) - (\pi t + \pi k + U)) + \cos((\pi t + U) + (\pi t + \pi k + U))\right]\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{E}\left[\cos(-\pi k) + \cos(2\pi t + \pi k + 2U)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(\pi k) + \mathrm{E}\left[\cos(2\pi t + \pi k + 2U)\right]\right].
\end{aligned}
$$

注意到 $\cos(-\pi k) = \cos(\pi k)$。由于 U 在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布，且 $2U$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上均匀分布（但需要注意周期性），所以对于任何常数 C：

$$\mathrm{E}[\cos(C + 2U)] = 0.$$

因为在一个周期内，cos 函数的积分为零。因此，

$$\mathrm{E}\left[\cos(2\pi t + \pi k + 2U)\right] = 0.$$

因此，自协方差函数为：

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}\cos(\pi k).$$

由于 $\cos(\pi k) = (-1)^k$，所以：

$$\gamma(k) = \frac{1}{2}(-1)^k.$$

(iii) 说明 $\gamma(k)$ 的周期特征：

$\gamma(k)$ 是关于 k 的函数，我们可以看到：

$$\gamma(k+2) = \frac{1}{2}(-1)^{k+2} = \frac{1}{2}(-1)^k(-1)^2 = \frac{1}{2}(-1)^k = \gamma(k).$$

因此，自协方差函数 $\gamma(k)$ 具有周期为 2 的周期性。(iv) 计算谱密度函数 $s(\omega)$：

谱密度函数定义为：

$$s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i2\pi\omega k}.$$

将 $\gamma(k) = \frac{1}{2}(-1)^k$ 代入：

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^k e^{-i2\pi\omega k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-i2\pi\omega k}. \end{aligned}$$

注意到：

$$(-1)^k = e^{i\pi k}.$$

因此，

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\pi k} e^{-i2\pi\omega k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\omega - \frac{1}{2})k}. \end{aligned}$$

(v) 给定 $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$，$s(\omega)$ 作为一个级数的收敛性：

当 $\omega = \frac{1}{2}$ 时：

$$e^{-i2\pi(\omega-\frac{1}{2})k} = e^{-i2\pi(0)k} = 1$$

因此级数变为：

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\omega-\frac{1}{2})k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

故 $s(\omega)$ 在 $\omega = \frac{1}{2}$ 时发散为无穷大，级数不收敛。

当 $\omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 时，$\omega - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$，此时每一项的模为：

$$|e^{-i2\pi(\omega-\frac{1}{2})}| = 1$$

但由于 $\omega - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$，各项的相位随着 k 的变化在单位圆上均匀分布，导致部分和在复平面上不断变化，不收敛到任何固定的复数。

考虑级数的部分和：

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} e^{-i2\pi(\omega-\frac{1}{2})k}$$

利用有限几何级数的求和公式：

$$S_N = e^{i2\pi(\omega-\frac{1}{2})N} \cdot \frac{1 - e^{-i2\pi(2N+1)(\omega-\frac{1}{2})}}{1 - e^{-i2\pi(\omega-\frac{1}{2})}}$$

进一步化简：

$$S_N = \frac{sin[(2N+1)\pi(\omega - \frac{1}{2})]}{sin[\pi(\omega - \frac{1}{2})]}$$

当 $N \to \infty$ 时，分子在 -1 和 1 之间振荡，而分母是一个非零常数（因为 $\omega - \frac{1}{2} \neq \mathbb{Z}$）。因此，部分和并不收敛。

故当 $\omega \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ 时，级数不收敛。

综上所述，对所有 $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$，$s(\omega)$ 作为一个级数不收敛。

(vi) 通过 R 语言绘图验证

虽然理论上级数不收敛，但我们可以通过数值计算部分和 $s_N(\omega)$ 来观察其行为。

R 代码示例：

```
# 设置参数
omega_seq <- seq(0, 0.5, length.out = 500)
N_values <- c(10, 100, 1000)

# 绘图
par(mfrow = c(3, 1))
for (N in N_values) {
  s_N <- numeric(length(omega_seq))
  for (i in 1:length(omega_seq)) {
    omega <- omega_seq[i]
    k_seq <- -N:N
    s_N[i] <- (1/2) * sum((-1)^k_seq * exp(-1i * 2 * pi *
        omega * k_seq))
  }
  plot(omega_seq, Mod(s_N), type = 'l', main = paste('N=',
     N), xlab = expression(omega), ylab = expression(s[N](
     omega)))
}
```

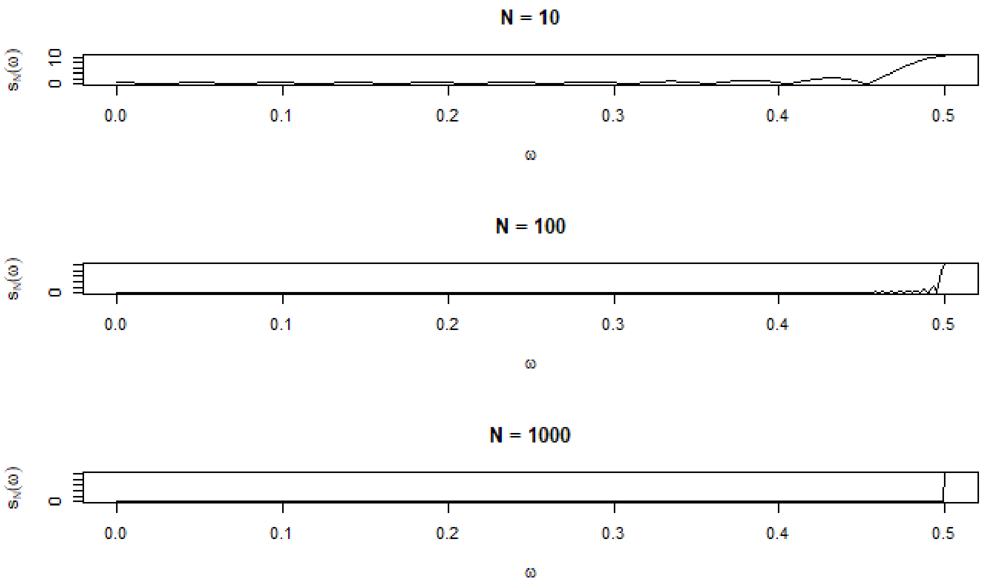
N = 10
$s_N(\omega)$
0
10
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ω
N = 100
$s_N(\omega)$
0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ω
N = 1000
$s_N(\omega)$
0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
ω

图 1: 数值模拟结果