2024 秋季本科时间序列

第 8 次作业

提交日期：12 月 2 日

1. 考虑 2 元 VAR(2) 过程

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0 & -0.04 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

   请回答如下问题：

   (a) 请证明该 VAR(2) 过程平稳。

   (b) 请将该 VAR(2) 过程改写为 VAR(1) 过程 $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t$，即写出各项的具体表达式。

   (c) 请计算 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值，说明 $\boldsymbol{Y}_t$ 的平稳性条件与 (a) 中 $\boldsymbol{X}_t$ 的条件相同。

   (d) 请计算 $\boldsymbol{\Psi}^n, n = 1, 2, \ldots$ 的表达式，进而计算 $\boldsymbol{Y}_t$ 及 $\boldsymbol{X}_t$ 的协方差矩阵。

2. 本题将证明实数对称正定矩阵的 Cholesky 分解定理。

   (a) 给定实数对称正定矩阵 $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]_{1\le i,j\le K}$，请说明对角线元素 $\omega_{ii} > 0, \forall i = 1, \ldots, K$。提示：定义 $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个位置为 1 其他位置为 0 的 $K \times 1$ 向量，并考虑 $\boldsymbol{e}_i^\intercal \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{e}_i$。

   (b) 定义 $\mathcal{T}$ 为所有 $K \times K$ 且对角线全为 1 的下三角矩阵的集合。请证明：(i) 对任意 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}$，$\boldsymbol{AB} \in \mathcal{T}$；(ii) $\mathcal{T}$ 中矩阵均可逆；(iii) $\mathcal{T}$ 中矩阵的逆矩阵依然属于 $\mathcal{T}$。

   (c) 令矩阵

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\omega_{21}}{\omega_{22}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{\omega_{K1}}{\omega_{KK}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

   请证明 $\Omega_1 \equiv \boldsymbol{A}_1 \Omega \boldsymbol{A}_1^\intercal$ 第一列、第一行除对角线外，均为 0，且 Ω_1 依然为对称正定矩阵。

   (d) 假设 $\boldsymbol{\Omega}_1$ 有如下表达式

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{22} & \cdots & \tilde{\omega}_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{K2} & \cdots & \tilde{\omega}_{KK} \end{bmatrix},$$

   请说明 $\tilde{\omega}_{22} > 0$，并参照 $\boldsymbol{A}_1$ 构造矩阵 $\boldsymbol{A}_2$（写出具体表达式），使得 $\boldsymbol{\Omega}_2 \equiv \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{\Omega}_1 \boldsymbol{A}_2^\intercal$ 的前两行、前两列除对角线外均为 0，且依然为对称正定矩阵。

   (e) 请说明上述步骤可重复进行，最终获得 $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{A}_K \boldsymbol{\Omega}_{K-1} \boldsymbol{A}_K^\intercal$ 为对角矩阵，且为正定矩阵（即对角线均大于 0）。

(f) 基于 (c)–(e)，并利用 (b)，证明 $\mathbf{\Omega}$ 存在 Cholesky 分解 $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{B}\mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{KK})\boldsymbol{B}^{\intercal}$，其中 $d_{ii} > 0, \forall i = 1, \ldots, K$ 且 $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{T}$。