2024 秋季本科时间序列

第 3 次作业

提交日期：10 月 21 日

1. 考虑如下谱密度函数的相关问题。

   (a) 请计算白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}, \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$ 的谱密度函数 $s_\varepsilon(\omega)$。

   (b) 给定平稳过程 $\{X_t\}$ 谱密度函数 $s_X(\omega) \equiv c > 0$ 为常数，请计算 X_t 的自协方差函数 $\gamma_X(k), k = 1, 2, \ldots$，从而说明 $\{X_t\}$ 为白噪声过程。

   (c) 给定平稳 ARMA(p, q) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$，其中 ε_t 方差为 $\sigma_\varepsilon^2, \theta_0 = 1$，请计算 X_t 的谱密度函数 $s_X(\omega)$ 表达式。

   (d) 假设 $|\phi|, |\theta| < 1$，计算并对比 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$、MA(1) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ 及 ARMA(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ 的谱密度函数，绘图说明各谱密度函数的峰值出现在什么位置，与 ϕ, θ 的正负及大小有何关系。注意：不需要使用软件来绘图，手绘示意图即可。

2. 考虑 MA(1) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$，其中 $|\theta| < 1$ 且 $\sigma_\varepsilon^2 = 1$。

   (a) 请计算 X_t 的自协方差函数 $\gamma(k), k = 0, 1$。

   (b) 假设有另一个白噪声过程 $\{\eta_t\}$ 且方差为 $\sigma_\eta^2 = 1/\theta^2$，请说明 X_t 可以等价的写为 $X_t = \eta_t + 1/\theta \eta_{t-1}$，即该表达式下 X_t 的自协方差仍然为 $\gamma(k)$。

   (c) 请利用 $X_t = (1 + \theta \mathscr{L})\varepsilon_t = (1 + 1/\theta \mathscr{L})\eta_t$，求解 η_t 关于 $\{\varepsilon_t\}$ 的表达式。提示：利用 $1 + 1/\theta \mathscr{L} = 1/\theta \mathscr{L}(1 + \theta L^{-1})$，进而将 $(1 + 1/\theta \mathscr{L})^{-1}$ 写为 $\theta \mathscr{L}^{-1} \frac{1}{1+\theta \mathscr{L}^{-1}}$，并对分式进行级数展开。

   (d) 利用 1(b) 结论说明，当 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声时，(c) 中定义的 η_t 同为白噪声。

3. 考虑 AR(2) 过程 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$，其中 ε_t 为方差等于 1 的白噪声过程，$\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ 且 $\phi_2 \neq 0$。

   (a) 请计算特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 两个零点 z_1, z_2 模长均大于 1 时，ϕ_1, ϕ_2 所需满足的条件，并画图表示。

   (b) 请说明平稳性条件满足时，课件 6 p.18 系数矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 是可逆矩阵，并用 Cramer 法则写出 $\mathbf{\Phi}^{-1}$ 的表达式。

   (c) 假设 $\phi_1 = 0.7, \phi_2 = -0.1$，请求解 X_t 自协方差 $\gamma(k)$ 的通项表达式。