2024 秋季本科时间序列

第 2 次作业

提交日期：10 月 12 日

1. 将课件 5 定理 1 的假设减弱为系数序列 $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 平方可和，请证明线性序列 $X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$ 为协方差平稳序列，其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程。

2. 在复平面 $\mathbb{C}$ 上对任意复数 z 定义指数函数为：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

   其中阶乘 $n! = 1 \times \cdots \times n \ \forall n \geq 1$，并补充定义 $0! = 1$。

   (a) 请证明，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，$|e^z| < \infty$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 是一个收敛级数。提示：注意到以下事实，从而使用复数版 Cauchy 收敛准则（可简单等同为实数版本）证明之：任选大于等于 $|z|$ 的正整数 M，则当 $n \geq M$ 时有 $\frac{M^n}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{M}{M+1}\right)^{n-M}$。

   (b) 进一步定义复数 z 的余弦和正弦函数为：

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

   请证明如下级数展开式：

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

   并说明上述级数展开式与定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的 $\cos, \sin$ 函数 Taylor 级数一致。

   (c) 请证明 $e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$；特别的，$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \ \forall \theta \in \mathbb{R}$。

   (d) 对于任意复数 $z = a + b\mathrm{i}$，令 θ 为向量 z 在 2-维平面 $\mathbb{C}$ 上与实部正半轴（即常规的 x-正半轴）的逆时针夹角，称为幅角。利用 (c)，请证明 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$；此表达式称为复数的极坐标形式。

   (e) 对任意复数 $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}, w = |w|e^{\mathrm{i}\phi}$，请计算乘积 zw 的极坐标表达式，并利用 $z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), w = |w|(\cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi))$，计算 zw 乘积的代数表达式 $a + b\mathrm{i}$，从而推导三角函数的和差化积公式。

3. 请计算课件 4 第 11 页最后例子中 $X_t = \cos(\pi t + U), U \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$ 的期望与自协方差函数 $\gamma(k)$，说明 $\gamma(k)$ 的周期特征，并计算 X_t 谱密度函数 $s(\omega)$ 的表达式。给定 $\omega \in [0, 1/2]$，谱密度函数 $s(\omega)$ 作为一个级数是否收敛？你可以给出证明，或者用 R 绘制 $s(\omega)$ 级数表达式的前 N 项和 $s_N(\omega)$ 在 $[0, 1/2]$ 上的函数图形（如在 $[0, 1/2]$ 上均匀取 100 或 500 个点，计算 $s_N(\omega)$ 的取值），并观察 $N = 10, 100, 1000$ 时 $s_N(\omega)$ 的图像是否逼近某个函数。