

2024 秋季本科时间序列

第 10 次作业

提交日期：12 月 16 日

1. 考虑一个 AR(1) 过程 $X_t = \rho X_{t-1} + u_t$, $|\rho| < 1$, 不可观测的冲击项 u_t 为一个平稳 GARCH 过程 $u_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$, ε_t 为 iid 白噪声且方差为 1, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$.
 - (a) 请说明 u_t 满足平稳性时, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 的参数取值限制条件。
 - (b) 请说明 u_t 是一个鞅差过程。
 - (c) 请验证 ρ 的 OLS 估计 $\hat{\rho}$ 依然具有一致性。
 - (d) 参考课件 9, 请推导 $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho)$ 渐近正态分布的方差表达式; 注意, 此时条件同方差假设不满足, 需要使用条件异方差的推导方法。
 - (e) 上述推导需要知道 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 的参数取值吗?
 - (f) 给定样本 $\{X_t\}_{t=0}^T$, 请说明按照 (d) 中结果如何计算 $\hat{\rho}$ 的异方差稳健渐近标准误的样本取值。若已知 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 的取值, 请思考能否利用该参数取值改进 $\hat{\rho}$ 渐近标准误的计算。
2. 考虑 AR(1) 过程 $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$, ε_t 为 iid 白噪声。
 - (a) 若 ρ 的真实值为 1, 请利用第 14 讲课件内容, 证明此时 OLS 估计量 $\hat{\rho}$ 满足如下超一致性 (super consistency): 对任意的 $\delta > 0$, $T^{1-\delta}(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。
 - (b) 若 ρ 的真实值满足 $|\rho| < 1$, 请证明 $T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty$ 。
3. 给定 $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_d t^d + Z_t$, 其中 Z_t 满足 $\Delta^d Z_t = \varepsilon_t$ 为 iid 白噪声
 - (a) 请计算验证 X_t 为 I(d) 过程。
 - (b) 假设 $d = 3$, 写出 Z_t 的表达式。
 - (c) 假设 $Z_t = \alpha + Z_{t-1} + \varepsilon_t$, 请写出相应回归方程 $Z_t = \alpha + \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$ 中截距项 α 的 OLS 估计表达式 $\hat{\alpha}_T$, 并说明在原假设 $H_0: \rho = 1$ 之下, $\hat{\alpha}_T$ 是否收敛到 α , 以及若一致性成立, 那么超一致性是否成立?