

2024 秋季本科时间序列

## 第 10 次作业

提交日期：12 月 16 日

1. 考虑一个 AR(1) 过程  $X_t = \rho X_{t-1} + u_t$ ,  $|\rho| < 1$ , 不可观测的冲击项  $u_t$  为一个平稳 GARCH 过程  $u_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t$  为 iid 白噪声且方差为 1,  $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ .
  - (a) 请说明  $u_t$  满足平稳性时,  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$  的参数取值限制条件。
  - (b) 请说明  $u_t$  是一个鞅差过程。
  - (c) 请验证  $\rho$  的 OLS 估计  $\hat{\rho}$  依然具有一致性。
  - (d) 参考课件 9, 请推导  $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho)$  渐近正态分布的方差表达式; 注意, 此时条件同方差假设不满足, 需要使用条件异方差的推导方法。
  - (e) 上述推导需要知道  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$  的参数取值吗?
  - (f) 给定样本  $\{X_t\}_{t=0}^T$ , 请说明按照 (d) 中结果如何计算  $\hat{\rho}$  的异方差稳健渐近标准误的样本取值。若已知  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$  的取值, 请思考能否利用该参数取值改进  $\hat{\rho}$  渐近标准误的计算。
2. 考虑 AR(1) 过程  $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t$  为 iid 白噪声。
  - (a) 若  $\rho$  的真实值为 1, 请利用第 14 讲课件内容, 证明此时 OLS 估计量  $\hat{\rho}$  满足如下超一致性 (super consistency): 对任意的  $\delta > 0$ ,  $T^{1-\delta}(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 。
  - (b) 若  $\rho$  的真实值满足  $|\rho| < 1$ , 请证明  $T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty$ 。
3. 给定  $X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_d t^d + Z_t$ , 其中  $Z_t$  满足  $\Delta^d Z_t = \varepsilon_t$  为 iid 白噪声
  - (a) 请计算验证  $X_t$  为 I(d) 过程。
  - (b) 假设  $d = 3$ , 写出  $Z_t$  的表达式。
  - (c) 假设  $Z_t = \alpha + Z_{t-1} + \varepsilon_t$ , 请写出相应回归方程  $Z_t = \alpha + \rho Z_{t-1} + \varepsilon_t$  中截距项  $\alpha$  的 OLS 估计表达式  $\hat{\alpha}_T$ , 并说明在原假设  $H_0: \rho = 1$  之下,  $\hat{\alpha}_T$  是否收敛到  $\alpha$ , 以及若一致性成立, 那么超一致性是否成立?