2024 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：9 月 30 日

1. 对 2 元随机变量 X, Y，利用 $\mathrm{cov}(X, Y)$ 的对称双线性特征，证明相关系数 $\rho_{XY} \in [-1, 1]$。提示：对任意 $a \in \mathbb{R}$，考察 $\mathrm{var}(aX + Y) = \mathrm{cov}(aX + Y, aX + Y)$ 的展开式，并利用关于 a 的二次函数判别式，证明相应结论。

2. 对样本 $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^N$，请证明样本相关系数

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_Y} \in [-1, 1],$$

其中样本协方差 $\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)(Y_i - \hat{\mu}_Y)$，样本方差 $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)^2$，$\hat{\sigma}_Y^2$ 类似，$\hat{\mu}_X, \hat{\mu}_Y$ 为样本均值。提示，与上题类似，将样本协方差看做向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_N]^\intercal, \boldsymbol{Y} = [Y_1, \ldots, Y_N]^\intercal$ 的对称双线性函数，然后对任意 $a \in \mathbb{R}$，考察 $a\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$ 的样本方差，并进行展开，得到 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 的样本协方差、方差等表达式，再行推导。

3. 假设总体分布为 $U([a, b])$，$a < b$，请计算该分布下的期望与方差表达式。进一步假设有 iid 样本 $\{X_i\}_{i=1}^N$，请利用期望与方差表达式，构造 a, b 的一个矩估计，并说明这一矩估计是否具有一致性。

4. 假设 iid 样本 $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=1}^N$ 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，密度函数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，请写出这组样本对应的似然函数 $L(\lambda|\mathcal{X})$，利用对数似然函数推导其极大似然估计 $\hat{\lambda}_N$，并说明该估计是否具有一致性。

5. 假设 $\{X_i\}_{i=1}^N$ 为 iid 样本，X_i 期望为 μ，方差为 σ^2。

   (a) 定义基于总体均值的样本方差估计为

   $$\hat{s}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2,$$

   请证明 $\mathbb{E}\hat{s}_N^2 = \sigma^2$，且 $\hat{s}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$。

   (b) 定义基于样本均值的样本方差估计为

   $$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_N)^2,$$

   其中 $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$，请证明 $\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 = \sigma^2$，且 $\hat{\sigma}_N^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma^2$。