金融工程 2024 年秋 · 时间序列

第 9 讲：时间序列回归分析拓展

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 10 月 28 日

本讲内容

1. 模型设定与评估
2. 稳健标准误
3. MA 模型的估计

本节内容

动态回归模型

- 单变量自回归模型：

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = p+1, \ldots, T$$
$$\Rightarrow X_t = \boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\phi} + \varepsilon_t$$

- 添加其他解释变量 $\boldsymbol{Z}_t$：

$$X_t = \boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{Z}_t^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$$

称为动态回归模型

动态回归模型

- 动态回归模型示例：货币政策的 Taylor 规则

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1-\rho)[\phi_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \phi_y(y_t - y_t^*)] + \varepsilon_t$$

其中 $\bar{\pi}$ 为目标通胀率，$y_t - y_t^*$ 为产出缺口

- OLS 估计的注意事项
  - X_t 平稳性取决于 $\boldsymbol{\phi}$ 和 $\boldsymbol{Z}_t$，后者通常需要假设为平稳序列
  - OLS 估计的一致性取决于 ε_t 与 $(\boldsymbol{Y}_{t-1}, \boldsymbol{Z}_t)$ 的相关性 $\Rightarrow$ 通常假设 $\mathbb{E}[\varepsilon_t|\boldsymbol{Y}_{t-1}, \boldsymbol{Z}_t] = 0$
  - OLS 估计的渐近分布：鞅差序列假设为 $\mathbb{E}[\boldsymbol{Y}_{t-1}\varepsilon_t|\Omega_{t-1}] = \boldsymbol{0}$，$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_t\varepsilon_t|\Omega_{t-1}] = \boldsymbol{0}$，信息集为 $\Omega_t = \{\boldsymbol{Y}_{t-1}, \boldsymbol{Y}_{t-2}, \ldots, \boldsymbol{Z}_t, \boldsymbol{Z}_{t-1}, \ldots\}$

回归分析的关键：内生性与识别问题

- 加总消费为 C_t，加总产出（收入）为 Y_t，考虑两个回归

$$\log(C_t) = \alpha \log(Y_t) + \varepsilon_t, \qquad \log(Y_t) = \phi \log(C_t) + \eta_t$$

其中，ε_t, η_t 表示两种不同的冲击

- 完全不同的两种解释：
  1. α 的估计值表示边际消费倾向 (marginal propensity to consume)
  2. ϕ 的估计值表示消费乘数 (consumption multiplier)
- 两个回归方程联立得

$$\log(C_t) = \frac{\varepsilon_t + \alpha\eta_t}{1 - \alpha\phi}, \qquad \log(Y_t) = \frac{\phi\varepsilon_t + \eta_t}{1 - \alpha\phi}$$

回归分析的关键：内生性与识别问题

- α 和 ϕ 在二战后的凯恩斯主义 (Keynesian) 经济学中都是反映经济运动规律的关键变量
  - 还有投资（储蓄）乘数、政府支出乘数、净出口乘数等
- 问题：两个回归方程的 OLS 估计，都是不一致的！
  - 令 $c_t = \log(C_t)$，$y_t = \log(Y_t)$，则

$$\hat{\alpha} = \alpha + \left(\frac{1}{T}\sum_t y_t^2\right)^{-1}\frac{1}{T}\sum_t y_t\varepsilon_t \xrightarrow{\text{a.s.}} \alpha + \left[\mathbb{E}y_t^2\right]^{-1}\mathbb{E}y_t\varepsilon_t$$

  但 $\mathbb{E}y_t\varepsilon_t = \frac{\phi}{1-\alpha\phi}\sigma_\varepsilon^2$
  - $\hat{\phi}$ 有同样问题
- 回归分析中的内生性 (endogeneity)：若回归变量与残差项协方差不为 0，则称回归存在内生性问题 $\Rightarrow$ OLS 估计结果是不一致的

回归分析的命门：内生性与识别问题

- 回归存在内生性，又称回归变量的外生性 (exogeneity) 条件不满足
- 此时，OLS 估计方法无法识别 (identify) 模型参数
  - 又称为存在参数识别问题 (identification problem)
- 更重要的影响：内生性带来的参数识别问题，妨碍有效的因果性推断 (causal inference)
  - 所得结论仅为相关性 (correlation) $\neq$ 因果性 (causality)
  - 而经济学的核心问题之一：研究 X 的变动如何引起 Y 的变动
  - 进一步的，如果 $W, Z, \ldots$ 也是 Y 的影响因素，则要研究的问题聚焦为：保持所有其他因素不变，X 对 Y 的边际作用 (marginal effect)

相关性与因果性的区分

- 新冠检测越多，则发现的病例越多——检测量与病例数存在正相关
  - 特朗普："我们的病例多，是因为我们检测多！" FAKE NEWS
  - 这不是因果关系：即便不检测，病例依然在
- 病例多，PPE（防护装备）、呼吸机、疫苗需求多——病例数与医用物资用量存在正相关
  - 这就是因果关系：如果没有病例，则没有医用物资的需求
- 在实证分析中，因果判断的本质是反事实 (counterfactual) 推理

内生性问题的 3 大来源

1. 遗漏变量 (ommitted variable)：真实模型是 $Y_t = \alpha X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t$，但回归模型仅考虑 X_t，

$$Y_t = \alpha X_t + u_t = \alpha X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t$$

而 X_t 与 Z_t 通常具有相关性 $\mathbb{E}X_t Z_t \neq 0$

- 最常见类型为遗漏共同因素 (common/confounding factor) 问题：前述消费-产出回归就是一个典型例子——宏观经济变量几乎都受到共同冲击（因素）的作用
- 如果能观测到所有共同因素，则加入回归可以消除内生性问题：$Y_t = \gamma Z_t + u_t$，$X_t = \delta Z_t + v_t$，则 $Y_t = \alpha X_t + \beta Z_t + \varepsilon_t$ 可以得到正确的 X_t 边际作用 α（保持 Z 不变，X 的变化对 Y 的影响），即 FWL 定理

内生性问题的 3 大来源

2. 倒向因果 (inverse causality)：回归模型 $Y_t = \alpha X_t + \gamma Z_t + \varepsilon_t$，但实际上 Z_t 是由 Y_t 所决定

$$Z_t = \beta Y_t + v_t \Rightarrow \mathbb{E} Z_t \varepsilon_t \neq 0$$

3. 测量误差 (measurement error)：无法观测 X_t，只能观测其代理 (proxy) 变量 $\tilde{X}_t = X_t + u_t$，回归模型有内生性

$$Y_t = \alpha X_t + \varepsilon_t = \alpha \tilde{X}_t + (\varepsilon_t - \alpha u_t)$$

即 $\mathbb{E}\tilde{X}_t(\varepsilon_t - \alpha u_t) \neq 0$

内生性问题的解决

- 近 20 年：经济学实证研究领域的因果推断 (causal inference) 革命
  - 2019 年诺奖 Banerjee, Duflo, and Kreme 随机控制实验 (randomized controlled trials, RCT)
  - 2021 年诺奖 Angrist, Card, and Imbens 潜在结果与反事实因果推断计量理论
- 常见方法：非随机实验方法
  - 工具变量 (instrumental variables)
  - 双重差分 (difference in difference, DID)
  - 断点回归 (regression discontinuity)
- 参考书
  - Angrist and Pischke, *Mostly Harmless Econometrics*, 2009
  - 邱嘉平，《因果推断实用计量方法》，2020

回归模型的评估：R^2 与调整 R^2

- 给定回归方程 $Y_t = \boldsymbol{X}_t^\top \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t$，称 $\hat{Y}_t = \boldsymbol{X}_t^\top \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为回归估计的拟合值 (fitted value)
- 用矩阵表示 $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}$
- 回归残差的估计值为 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{Y}}$，可验证 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \perp \hat{\boldsymbol{Y}}$，即 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\top \hat{\boldsymbol{Y}} = 0 \Rightarrow \{Y_t\}$ 样本变动（方差）可分解为

$$\sum_t Y_t^2 = \boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y} = \hat{\boldsymbol{Y}}^\top\hat{\boldsymbol{Y}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\top\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_t \hat{Y}_t^2 + \sum_t \hat{\varepsilon}_t^2$$

- 定义

$$R^2 = \frac{\sum_t \hat{Y}_t^2}{\sum_t Y_t^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{Y}}^\top\hat{\boldsymbol{Y}}}{\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y}} = 1 - \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\top\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\boldsymbol{Y}^\top\boldsymbol{Y}} \in [0,1]$$

- R^2 可理解为回归模型对 Y_t 的解释力 (explanatory power)

回归模型的评估：R^2 与调整 R^2

- 只有一个常数回归变量即 $\boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}} = 1$ 时，$\hat{Y}_t = \mu_Y$，此时有 $R^2 = T\mu_Y^2/\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}$
- 增加回归变量可以提高 R^2：定义 $\tilde{\boldsymbol{X}} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_{K+1}]$，$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}, \beta_{K+1}]^{\mathsf{T}}$，考虑回归 $\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}$，则

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{b}} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathsf{T}}\tilde{\boldsymbol{Y}} \geq \hat{\boldsymbol{Y}}^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{Y}} \Rightarrow R^2 \uparrow$$

- 极端情况：如果 $K = T$，且 $\boldsymbol{X}$ 满秩，则由 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{Y}$ 可直接解出 $\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$，$R^2 = 1$
- 克服解释变量个数对解释力的影响：定义<u>调整 R^2</u>

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}/(T-K-1)}{\boldsymbol{Y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}/(T-1)} = 1 - (1-R^2)\frac{T-1}{T-K-1}$$

模型选择

- 建立回归模型：首先决定选取哪些变量作为解释变量
  - 理想状态：经济、金融理论“完全决定”选取哪些解释变量
  - 实际情况：理论只能做部分决定 $\Rightarrow$ 部分变量仍需人工决策
- 模型选择 (model selection)：根据给定的信息准则 (information criterion) 进行变量选取
  - AIC (Akaike's IC)：$\text{AIC} = \log \hat{\sigma}^2_{\varepsilon,K} + 2K/T$；小样本效果较好
  - BIC (Bayesian IC)：$\text{BIC} = \log \hat{\sigma}^2_{\varepsilon,K} + (K \log T)/T$；大样本效果较好
- 从备选解释变量中，选择对应 IC 最小的一组变量

本节内容

残差项：同方差 v.s. 异方差

- 到目前为止，均使用同方差 (homoskedasticity) 假设：

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\boldsymbol{X}_t] = \sigma_\varepsilon^2$$

- 该假设排除了残差项波动率随时间或解释变量的改变而改变的情况
- 更一般假设：条件异方差 (conditional heteroskedasticity)

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\boldsymbol{X}_t] = \sigma_{\varepsilon,t}^2$$

中心极限定理：异方差情形

定理 1 (鞅差序列 CLT：多元、异方差情形)

假设 $\{\boldsymbol{X}_t\}$ 为（向量）鞅差序列，$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}_t|\Omega_{t-1}] = \boldsymbol{0}$，$\Omega_t$ 为 t-时的信息集：$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top] = \boldsymbol{\Sigma}_t$ 为 t-时协方差矩阵，若序列平均协方差矩阵收敛 $\frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{\Sigma}_t \to \boldsymbol{\Sigma}$，且样本交叉矩收敛到同样矩阵 $\frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{\Sigma}$，则对应的样本均值向量有如下极限分布

$$\sqrt{T}\hat{\boldsymbol{\mu}}_{X,T} \xrightarrow{\text{d}} N(0, \boldsymbol{\Sigma})$$

OLS 估计的渐近分布：异方差情形

- 考察 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 的渐近分布

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_T - \boldsymbol{\beta}_0) = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\underbrace{\boldsymbol{X}_t\varepsilon_t}_{\text{鞅差序列}}$$

- 样本均值为 $\boldsymbol{\mu}_{X\varepsilon,T} = \frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{X}_t\varepsilon_t$，需要确定 $\sqrt{T}\boldsymbol{\mu}_{X\varepsilon,T}$ 的分布 $\Longrightarrow$ 确定其极限协方差矩阵
- 将 OLS 估计同方差假设替换为如下异方差假设：

$$\frac{1}{T}\sum_t \varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{\Sigma} \equiv \lim_T \frac{1}{T}\sum_t \mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}}\right]$$

- 由前页 CLT 知

$$\sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{X}_t\varepsilon_t \xrightarrow{\text{d}} N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Sigma})$$

OLS 估计的渐近分布：异方差情形

- 继续假设 $\frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top = \boldsymbol{M}$，则此时

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_T - \boldsymbol{\beta}_0) \xrightarrow{\text{d}} N\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{M}^{-1}\right)$$

- 故当 T 足够大时，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_T - \boldsymbol{\beta}_0 \sim N\left(\boldsymbol{0}, \frac{1}{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{M}^{-1}\right)$
- 由条件异方差假设，

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top\right] = \mathbb{E}\mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top\middle|\boldsymbol{X}_t\right] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top\mathbb{E}(\varepsilon_t^2|\boldsymbol{X}_t)\right] = \mathbb{E}\left[\sigma_{\varepsilon,t}^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top\right]$$

- 对比同方差假设：$\mathbb{E}\left[\varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top\right] = \sigma_\varepsilon^2\mathbb{E}[\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top] = \sigma_\varepsilon^2\boldsymbol{M}$

OLS 估计的渐近分布：异方差情形

- 给定样本 $\{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}_{t=1}^{T}$，需要估计 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{\Sigma}$
- $\boldsymbol{M}$ 的估计与同方差情形一致：$\hat{\boldsymbol{M}} = \frac{1}{T}\sum_t \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top = \frac{1}{T}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X}$
- $\boldsymbol{\Sigma}$ 的估计：首先利用 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 得到 $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \boldsymbol{X}_t^\top\hat{\boldsymbol{\beta}}$，进而由

$$\frac{1}{T}\sum_t \varepsilon_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{X}_t^\top = \frac{1}{T}\boldsymbol{X}^\top\mathrm{diag}(\hat{\varepsilon}_1^2, \ldots, \hat{\varepsilon}_T^2)\boldsymbol{X}$$

- 样本渐近分布：$\hat{\boldsymbol{\beta}}_T - \boldsymbol{\beta}_0 \sim N\left(\boldsymbol{0}, \frac{1}{T}\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\right)$
- 样本渐近协方差矩阵 $\frac{1}{T}\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{M}}^{-1}$ 对角线第 k 个元素平方根：$\hat{\beta}_{k,T}$ 的稳健标准误 (robust s.e.)

本节内容

MA 模型的估计

- 考虑 MA(q) 模型：$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$
  - X_t 可逆 $\Leftrightarrow B(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ 的零点 $z_1, \ldots, z_q$ 均位于单位圆之外
- 若 X_t 可逆，则 $B^{-1}(\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t$，是一个 AR($\infty$) 过程：

$$B^{-1}(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_q}\right)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i z^i$$

$$\Longrightarrow X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

MA 模型的近回归估计

- 首先将 X_t 看做一个 AR(p) 过程，p 较大，进行 OLS 估计，得到残差序列 $\{\hat{\varepsilon}_t\}$
- 再用 $\hat{\varepsilon}_t$ 代替 ε_t，估计回归方程

$$X_t = \hat{\varepsilon}_t + \vartheta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \cdots + \vartheta_q \hat{\varepsilon}_{t-q} + e_t$$

- 可以证明，当样本量 $T \to \infty$ 时，$\hat{\vartheta}_j \xrightarrow{\text{a.s.}} \theta_j$
- 也可以直接计算 X_t 自协方差关于 $\theta_1, \ldots, \theta_q$ 的表达式，然后用 X_t 的样本自协方差对 $\{\theta_j\}$ 进行估计

MA 模型的极大似然估计

- 另一种估计办法是 ML 估计，但需要额外的分布假设
- 若 $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$，则 $\boldsymbol{X} = [X_{q+1}, \ldots, X_T]^\intercal$ 服从多元正态分布 $N(0, \boldsymbol{\Sigma})$
  - $\boldsymbol{\Sigma}$ 的每个元素都是 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \ldots, \theta_q]^\intercal$ 与 σ_ε^2 的函数
  - 可以记做 $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2)$
- 可以写出对数似然函数

$$\log L(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\theta}, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\det\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X}$$

线性回归模型的极大似然估计

- 考虑线性回归模型：$Y_t = \boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t, t = 1, \ldots, T$
- 若残差为正态独立同分布 $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$，则可将样本数据 $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) = \{Y_t, \boldsymbol{X}_t\}$ 的似然值写为

$$L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^T \sigma_\varepsilon^{2T}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \boldsymbol{X}_t^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\beta})^2 \right\}$$

- ML 估计：$\max_{\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2} L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2)$，等价于最大化对数似然值

$$\max_{\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2} \log L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2)$$

线性回归模型的极大似然估计

- 对数似然函数：

$$\log L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}|\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2) = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{T}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \boldsymbol{X}_t^\top\boldsymbol{\beta})^2$$

- 考虑 $\boldsymbol{\beta}$ 的 ML 估计：

$$\max_{\boldsymbol{\beta}} \log L \Leftrightarrow \min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{t=1}^{T}(Y_t - \boldsymbol{X}_t^\top\boldsymbol{\beta})^2$$

故，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML,T} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,T} = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}$

- 考虑 $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon,ML} \Rightarrow$ 计算 $\partial_{\sigma_\varepsilon^2}\log L(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}|\boldsymbol{\beta}, \sigma_\varepsilon^2)$

ARMA 模型的极大似然估计

- 考虑 ARMA(p,q) 模型 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q},\ t = 1,\ldots,T$$

- 假设 $\varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,\sigma_\varepsilon^2)$，则 $A(\mathscr{L})X_t$，$t = 1,\ldots,T$，服从多元正态分布 $N(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为 $\theta_1,\ldots,\theta_q,\sigma_\varepsilon^2$ 的函数
- 进一步的，定义 $Y_t \equiv A(\mathscr{L})X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}$，以及 $\boldsymbol{Y} = [Y_1,\ldots,Y_T]^\intercal$，则可以写出样本 $\boldsymbol{X} = \{X_t\}_{1-p}^T$ 对应的（对数）似然函数

$$\log L(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\theta},\sigma_\varepsilon^2) = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\det\boldsymbol{\Sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{Y}^\intercal\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{Y}$$

- 数值求解系数 $\phi_1,\ldots,\phi_p,\theta_1,\ldots,\theta_q,\sigma_\varepsilon^2$ 的极大似然估计