金融工程 2024 年秋 · 时间序列

第 6 讲：ARMA 过程的表示与性质

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 10 月 12 日

本讲内容

1. ARMA 过程及其表示
2. ARMA 过程的性质
3. AR 过程的矩估计

本节内容

1. ARMA 过程及其表示
2. ARMA 过程的性质
3. AR 过程的矩估计

ARMA 过程的定义

- ARMA：自回归移动平均 (autoregressive moving average)
- ARMA(p,q)：p-阶自回归，q-阶移动平均，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}, \qquad \phi_p, \theta_q \neq 0$$

通常将 θ_0 单位化为 1

- 滞后算子表示

$$A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t,$$

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathscr{L}^i, \qquad B(\mathscr{L}) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \mathscr{L}^j$$

AR 过程与 MA 过程

- 若 $B(\mathscr{L})=1$，则 $A(\mathscr{L})X_t=\varepsilon_t$，称为 AR($p$) 过程
  - 如 $A(\mathscr{L})=1-\rho\mathscr{L}$，则是 AR(1) 过程
  - 若 $|\rho|<1$，则 $(1-\rho\mathscr{L})^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\mathscr{L}^i$ 收敛
  - 此时 $X_t=A^{-1}(\mathscr{L})\varepsilon_t=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\varepsilon_{t-i}$
- 若 $A(\mathscr{L})=1$，则 $X_t=B(\mathscr{L})\varepsilon_t$，称为 MA($q$) 过程
  - 如 $B(\mathscr{L})=1+\theta\mathscr{L}$，则是 MA(1) 过程
  - 若 $|\theta|<1$，则 $(1+\theta\mathscr{L})^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j\mathscr{L}^j$ 收敛
  - 此时有 $\varepsilon_t=B^{-1}(\mathscr{L})X_t=\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^jX_{t-j}$

ARMA 过程的特征多项式

- 给定 ARMA(p,q) 过程 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$
- 将 $A(\mathscr{L}) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \mathscr{L}^i$ 对应的多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ 称为 AR 部分的特征多项式 (characteristic polynomial)
- 将 $B(\mathscr{L}) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \mathscr{L}^j$ 对应的多项式 $B(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j z^j$ 称为 MA 部分的特征多项式
- 特征多项式的零点具有重要的性质！

特征多项式分解

- **代数基本定理：** 考虑 n-阶多项式 $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$，则 $P(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 有 n 个零点 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$
- $P(z)$ 可写为

$$P(z) = (z - z_1) \times \cdots \times (z - z_n)$$

- 若特征多项式为 $P(z)$，则对应的滞后算子多项式 $P(\mathscr{L})$ 可分解为

$$P(\mathscr{L}) = (\mathscr{L} - z_1) \times \cdots \times (\mathscr{L} - z_n)$$

ARMA 过程的平稳性

- 有限阶 MA(q) 过程一定是平稳过程
  - 请验证！
- ARMA(p,q) 平稳性决定于 AR 部分特征多项式 $A(z)$ 的零点分布
- 首先说明，如果 $\{Y_t\}$ 是平稳过程，那么当复数 $\rho \in \mathbb{C}$ 的模长 (modulus) $|\rho| < 1$ 时，由 $(1-\rho\mathscr{L})X_t = Y_t$ 所确定的 $\{X_t\}$ 也是平稳过程
- 再说明，如果 $A(z)$ 零点均位于复平面单位圆之外，则 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 确定的 $\{X_t\}$ 是平稳过程

平稳 ARMA 过程与 Wold 表示

- 令 $z_1, \ldots, z_p$ 为平稳 ARMA(p,q) 过程 AR 部分特征多项式零点，则 $|z_1|, \ldots, |z_p| > 1$，且有

$$A(z) = \left(1 - \frac{1}{z_1} z\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p} z\right)$$

- 因此 $A(\mathscr{L})X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 可写为

$$\left(1 - \frac{1}{z_1}\mathscr{L}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{z_p}\mathscr{L}\right) X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t \Rightarrow X_t = \frac{1}{1 - \frac{1}{z_1}\mathscr{L}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{z_p}\mathscr{L}} B(\mathscr{L})\varepsilon_t$$

- 注意到 $1/|z_1|, \ldots, 1/|z_p| < 1$，且 $B(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 平稳，故 X_t 平稳

MA 过程的可逆性

- 前面看到，MA(1) $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$，如果 $|\theta| < 1$，则有 $\varepsilon_t = (1+\theta\mathscr{L})^{-1}X_t$，亦为平稳过程
- 有限阶 MA(q) 过程，$X_t = B(\mathscr{L})\varepsilon_t$，若特征多项式 $B(w) = (w-w_1)\cdots(w-w_q)$ 的零点 $w_1,\ldots,w_q$ 均在复平面单位圆之外，则称 X_t 可逆 (invertable)，且有

$$\varepsilon_t = B^{-1}(\mathscr{L})X_t = \frac{(-1)^q}{w_1\cdots w_q}\frac{1}{1-\frac{1}{w_1}\mathscr{L}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{w_q}\mathscr{L}}X_t$$

- ARMA(p,q) 过程称为可逆的，若其 MA 部分可逆

ARMA 过程与可约性

- 考虑“形式上”的 ARMA(2, 1) 过程 $X_t = X_{t-1} - 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$，对应的特征多项式为

$$A(\mathscr{L}) = 1 - \mathscr{L} + 0.25\mathscr{L}^2 = (1 - 0.5\mathscr{L})^2, \quad B(\mathscr{L}) = 1 - 0.5\mathscr{L}$$

$$\Rightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})^2 X_t = (1 - 0.5\mathscr{L})\varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow (1 - 0.5\mathscr{L})X_t = \varepsilon_t, \quad \text{ARMA}(1, 0)!$$

- 此 ARMA(2, 1) 过程实质是一个 ARMA(1, 0) 过程
- 为避免此情形，一般均要求 $A(z)$ 的零点 $\{z_1, \ldots, z_p\}$ 与 $B(z)$ 的零点 $\{w_1, \ldots, w_q\}$ 互不相同
  - 若有 $z_i = w_j$，称该过程可约 (reducible)；若 X_t 是 ARMA(p, q) 过程，一般要求其不可约

本节内容

1 ARMA 过程及其表示

2 ARMA 过程的性质

3 AR 过程的矩估计

MA 过程的无条件矩 (unconditional moments)

- 给定 MA(q) 过程

$$X_t = \mu + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \mu$
- 方差为 $\mathrm{var}X_t = \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \theta_j \theta_{j+k}, & k = 0, \ldots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

AR(1) 过程的无条件矩

- 给定 AR(1) 过程

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\phi| < 1$$

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{1-\phi}$
- 方差为 $\mathrm{var}X_t = \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
- 自协方差为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- 自相关系数为 $\rho_X(k) = \phi^k$

AR(1) 过程自协方差

- 计算可知，对平稳 AR(1) 过程有

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

- 由此，可将高阶自协方差写为

$$\sigma_X^2(k) = \phi^k \sigma_X^2(0)$$

- 另一种写法：首先，由 X_{t-1} Wold 表示知其仅与 $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots$ 有关，故 $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] = 0$，进而有

$$X_t X_{t-1} = \phi X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1} \Rightarrow \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] = \phi \mathbb{E}[X_{t-1}^2] + 0 \Rightarrow \sigma_X^2(1) = \phi \sigma_X^2(0)$$
$$X_t X_{t-(k+1)} = \phi X_{t-1} X_{t-(k+1)} + \varepsilon_t X_{t-(k+1)} \Rightarrow \sigma_X^2(k+1) = \phi \sigma_X^2(k)$$

AR(p) 过程的无条件件矩

- 给定平稳 AR(p) 过程

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

即特征多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ 满足零点 $\{z_1, \ldots, z_p\}$ 在单位圆外

- 其期望为 $\mathbb{E}X_t = \frac{\mu}{A(1)}$
- 方差及自协方差的一般表达式要复杂一些

AR(2) 过程的例子

- 给定平稳 AR(2) 过程 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$，特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 的两个零点均位于单位圆之外
- 两端分别乘以 X_{t-1}，X_{t-2} 可得

$$\sigma_X^2(1) = \phi_1 \sigma_X^2(0) + \phi_2 \sigma_X^2(1)$$
$$\sigma_X^2(2) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(0)$$

- 两端乘以 X_t，注意到 $\mathrm{cov}(X_t, \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$，可得

$$\sigma_X^2(0) = \phi_1 \sigma_X^2(1) + \phi_2 \sigma_X^2(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

AR(2) 过程的例子

- 上述 3 个方程，可以看做是 $\sigma_X^2(k),\ k=0,\ldots,2$ 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2-1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) \\ \sigma_X^2(1) \\ \sigma_X^2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

- 求解上述方程，可得到 $\sigma_X^2(k),\ k=0,\ldots,2$ 的表达式
  - 思考：平稳性与上述方程系数矩阵的可逆性有什么关系？
- 使用 Cramer 法则，可直接写出系数矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 的逆：

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{\Phi}} \mathbf{\Phi}^*,$$

其中 $\mathbf{\Phi}^*$ 为 $\mathbf{\Phi}$ 的伴随矩阵

AR(2) 过程的例子

- 给定 $\sigma_X^2(k)$, $k = 0, \ldots, 2$，可以递归计算平稳 AR(2) 过程的任意阶自协方差 $\sigma_X^2(k)$
- 在 $X_{t+k} = \phi_1 X_{t+k-1} + \phi_2 X_{t+k-2} + \varepsilon_{t+k}$，$k \geq 2$ 两端分别乘以 X_t 可得

$$\sigma_X^2(k) = \phi_1 \sigma_X^2(k-1) + \phi_2 \sigma_X^2(k-2),$$

进一步可写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(k) \\ \sigma_X^2(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(k-1) \\ \sigma_X^2(k-2) \end{bmatrix}$$

Yule-Walker 方程

- 给定平稳 AR(p) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$，特征多项式 $A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i z^i$ 的 p 个零点均位于单位圆之外
- 两端依次乘以 $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$，可得

$$\begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

- 两端乘以 X_t 可得：

$$\sigma_X^2(0) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \sigma_X^2(i) + \sigma_\varepsilon^2$$

- 上述两组方程，称为 Yule-Walker 方程

本节内容

1. ARMA 过程及其表示
2. ARMA 过程的性质
3. AR 过程的矩估计

AR(1) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，但参数 ϕ, σ_ε 未知
  - 这个 AR(1) 过程就是 $\{X_t\}$ 的 DGP
- 问题：如何估计 ϕ 以及 σ_ε？
- 联想 AR(1) 的 Yule-Walker 方程 $\phi = \sigma_X^2(1)/\sigma_X^2(0)$，可以得到一个 ϕ 的一个估计值

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}_X^2(1)}{\hat{\sigma}_X^2(0)}$$

其中，$\hat{\sigma}_X^2(1), \hat{\sigma}_X^2(0)$ 分别为 $\{X_t\}$ 的 1-阶样本自协方差与样本方差；后两者的一致性保证了 $\hat{\phi}$ 的一致性

AR(1) 的估计：冲击项方差

- 暂时回归 σ_ε^2 的估计问题
- 利用大数律，自然的想法是利用样本方差 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2$ 来估计 σ_ε^2；但唯一的观测值为 $\{X_t\}$，而非 $\{\varepsilon_t\}$
- 但是，若有一致估计量 $\hat{\phi}_T$，则大样本下

$$e_t = X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

因此，可利用冲击项 ε_t 的样本估计值 e_t 来估计 σ_ε^2:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} e_t^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$$

AR(p) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(p) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$，但参数 $\phi_1, \ldots, \phi_p, \sigma_\varepsilon$ 未知
- 类似于 AR(1)，如果有 ϕ_i 的一致估计 $\hat{\phi}_i$，则可计算样本冲击 e_t，从而用 $\hat{\sigma}_e^2$（一致）估计 σ_ε^2
- 从 Yule-Walker 方程出发，可以得到

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix}$$

AR(p) 自回归系数的 Yule-Walker 估计

- 给定样本 T 足够大，则样本自协方差是对 X_t 总体自协方差的一致估计
- 在 Yule-Walker 方程中应用样本自协方差，则可以得到 $\phi_1, \ldots, \phi_p$ 的一致估计

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(0) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p-1) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(1) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p) \end{bmatrix}$$