

金融工程 2024 年秋 · 时间序列

第 5 讲：平稳时间序列自相关性与谱

授课人：刘 岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 9 月 30 日

本讲内容

- ① 序列相关性
- ② 线性序列
- ③ 算子与表示
- ④ 时间序列的谱

本节内容

- 1 序列相关性
- 2 线性序列
- 3 算子与表示
- 4 时间序列的谱

白噪声

- 白噪声 (white noise) 是最常见的一类平稳时间序列
- $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声, 若满足 $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$, $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$, 以及 $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \forall k \geq 1$
- iid 序列是白噪声, 反之不成立
- 但大部分时间序列模型中, 均假设白噪声——经常又称作新息 (innovation) 或冲击 (shock)——是 iid 序列

自协方差与自相关系数

给定平稳时间序列 $\{X_t\}$

- 平稳时间序列最基本的分析对象：自协方差函数 (autocovariance function, ACF) $\sigma_X^2(k) = \text{cov}(X_t, X_{t-k})$
 - Cauchy-Schwartz 不等式： $[\text{cov}(X, Y)]^2 \leq \text{var}(X)\text{var}(Y)$
 - 自协方差 $\sigma_X^2(k) \leq \sigma_X^2(0) = \text{var}(X_t)$
- 自协方差函数经常也用 $\gamma_X(k)$ 来表示，避免写上标“2”
- 自相关系数函数 (autocorrelation function, **ACF**) $\rho_X(k) = \sigma_X^2(k)/\sigma_X^2(0)$
 - 自相关系数反映的是序列的持续性(persistence)： $t-k$ 期取值和 t 期取值的同步特征

偏自相关系数

给定时间序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$

- 还可以考虑另一种方法来描述数据的持续性特征，即偏自相关系数 (partial autocorrelation)
- 考虑 X_t 对 X_{t-k} , $k = 1, \dots, K < T$ 的回归方程

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_K X_{t-K} + e_t$$

- 上述回归方程系数 β_k 的 OLS (ordinary least square) 估计值 $\hat{\beta}_k$ 就称为 X_t 的 k -阶偏自相关系数 (估计值)
 - 偏自相关系数与自相关系数之间紧密联系；以 AR(1) 模型为例， $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, ε_t 为白噪声，则其 1-阶自相关系数等于 1-阶偏自相关系数
 - 但一般情况下，并不相等

本节内容

- 1 序列相关性
- 2 线性序列**
- 3 算子与表示
- 4 时间序列的谱

线性时间序列

- 本课程大部分内容考虑线性 (linear) 时间序列
- 给定白噪声序列 $\{\varepsilon_t\}$, 时间序列 $\{X_t\}$ 称为关于 $\{\varepsilon_t\}$ 的线性时间序列, 若

$$X_t = \sum_{k=0}^K \phi_k \varepsilon_{t-k},$$

其中 K 的取值可以是有限值, 也可以是无限值

- 当 $K = \infty$ 时, 通常要求 $\{\phi_k\}$ 满足绝对和收敛 (absolutely summable), 即 $\sum_{k=0}^{\infty} |\phi_k| < \infty$
- 另一种要求是满足平方和收敛 (square summable), 即 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^2 < \infty$

线性时间序列示例

事实上，**所有线性时间序列都是平稳序列**，具体例子如下

- q -阶移动平均 (moving average) 过程 $MA(q)$: 给定白噪声 $\{\varepsilon_t\}$,
$$X_t = \sum_{j=0}^q \phi_j \varepsilon_{t-j}, \text{ 其中 } \{\phi_j\} \in \mathbb{R}$$
 - q 称为滞后期 (lag period); 可为无穷, 记为 $MA(\infty)$
- 1-阶自回归 (autoregressive) 过程 $AR(1)$: $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, |\rho| < 1$
 - 可递归的写为 $MA(\infty)$ 过程: $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i}$

线性时间序列的平稳性

定理 1

给定任意常数 $\mu \in \mathbb{R}$ 、绝对可和序列 $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 以及白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ ，则线性时间序列

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j}$$

是协方差平稳序列

证明：1-阶矩 $\mathbb{E}X_t \equiv \mu$ ，故只需分析 2-阶矩的平稳性

线性时间序列的平稳性

对任意 k 计算 $\mathbb{E}(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)$, 由 $\mathbb{E}\varepsilon_t \varepsilon_{t-i} = 0, \forall i \geq 1$ 可知

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) &= \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-k-j} \\ &= \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} \sum_{j=k}^{\infty} \phi_{j-k} \varepsilon_{t-j} \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \phi_j \phi_{j-k} \sigma_{\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

由于 $\sum_{j=k}^{\infty} \phi_j \phi_{j-k}$ 收敛 (作业 1), 上述计算说明 X_t 的自协方差 **存在** 且不随时间变化, 故得证

□

Wold 表示定理

定理 2 (Wold)

任意的协方差平稳序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 都可以表示为如下三部分的和：

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j \varepsilon_{t-j} + V_t,$$

其中，

- ① μ 为常数， $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 是白噪声序列
- ② $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 平方和收敛 $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j^2 < \infty$
- ③ $\forall t, \text{cov}(V_t, \varepsilon_t) = 0$ ，且 V_t 可由过去信息 $\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ 的线性组合完全决定

Wold 表示定理

- V_t 的例子：参考上讲第 11 页 $V_t = \cos(\pi t + U)$ 并假设 U 与 $\{\varepsilon_t\}$ 无关
 - 定理中 $\{\varepsilon_t\}$ 、 $\{\phi_j\}$ 及 $\{V_t\}$ 都可以从观测序列 $\{X_t\}$ 构造得到
- Wold 表示定理意味着任意的（协方差）平稳过程，差不多就是一个（系数平方可和）线性过程
- 反过来，任意（系数绝对可和）线性过程，也是平稳过程
 - 思考：若系数序列是平方可和，线性过程是否是协方差平稳过程？

本节内容

- 1 序列相关性
- 2 线性序列
- 3 算子与表示**
- 4 时间序列的谱

滞后算子

- 为了简化记法、方便运算，定义滞后算子 (lag operator) \mathcal{L} ，其作用是将 t 期变量变换为 $t-1$ 期变量：

$$\mathcal{L} : X_t \mapsto X_{t-1}$$

记做 $\mathcal{L}X_t = X_{t-1}$

- 进一步定义之后算子的“乘法”或是“复合”：

$$\underbrace{\mathcal{L} \circ \dots \circ \mathcal{L}}_{k \text{ 次}} \equiv \mathcal{L}^k : X_t \mapsto X_{t-k}$$

记做 $\mathcal{L}^k X_t = X_{t-k}$

算子多项式

- 滞后算子可以当做变元 x ，写为多项式形式，如 $\mathcal{L} + \rho\mathcal{L}^2$ ，其作用就是把 X_t 变做 $(\mathcal{L} + \rho\mathcal{L}^2)X_t = X_{t-1} + \rho X_{t-2}$
- 如此，可将一般的线性时间序列表达式写为滞后算子多项式表达的形式：令

$$A(\mathcal{L}) = \sum_{k=0}^K \phi_k \mathcal{L}^k,$$

则再前页 X_t 可写为 $X_t = A(\mathcal{L})\varepsilon_t$

- 类似的，可将 AR(1) 写为 $X_t - \rho X_{t-1} = (1 - \rho\mathcal{L})X_t = \varepsilon_t$
 - 形式上还可以进一步写为 $X_t = \frac{1}{1-\rho\mathcal{L}}\varepsilon_t$ ，再利用 $\frac{1}{1-\rho\mathcal{L}} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \mathcal{L}^i$ ，则得到 MA(∞) 表达

本节内容

- 1 序列相关性
- 2 线性序列
- 3 算子与表示
- 4 时间序列的谱**

谱函数：定义

- 经济或金融时间序列样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 通常会表现出肉眼可见的“周期性”
- 具体刻画这种“周期性”，需要引入谱 (spectrum) 的概念
- 给定平稳时间序列 $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ 及其自协方差函数 $\gamma(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, 对 $\omega \in \mathbb{R}$, 定义

$$s_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i2\pi\omega k},$$

其中 i 为虚根，称 $s_X(\omega)$ 为 $\{X_t\}$ 的谱（密度）函数 (spectral density function)

- 谱是数学中的一个通用概念，用于刻画数学对象的本质特征
 - 矩阵特征值又称为矩阵的谱；随机变量的特征函数也是一种谱函数

谱函数：条件与性质

- 谱函数定义中，对 $\{\gamma(k)\}$ 序列的收敛性有一定要求
 - 至少要求平方和收敛 $\sum_k \gamma^2(k) < \infty$
 - 若绝对和收敛 $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$ ，则谱函数 $s_X(\omega)$ 具有好的性质
- 若 $s_X(\omega)$ 是 $\{X_t\}$ 的谱函数，则对应的自协方差函数满足下述求逆公式：

$$\gamma(k) = \int_{-1/2}^{1/2} s_X(\omega) e^{i2\pi\omega k} d\omega$$

注意， $s_X(\omega)$ 为周期等于 1 的函数，即 $s_X(\omega) = s_X(\omega + 1)$

- 由 DeMoivre 公式 $e^{-i2\pi\omega k} = \cos(2\pi\omega k) - i \sin(2\pi\omega k)$ 可得

$$s_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) [\cos(2\pi\omega k) - i \sin(2\pi\omega k)] = \gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos(2\pi\omega k)$$

谱函数的直观讨论

- 三角函数 $\cos(2\pi\omega t), \sin(2\pi\omega t)$ 反映了频率为 ω 的周期波动
 - 相应的周期为 $1/\omega$
- 给定随机变量 $\alpha(\omega)$ 与 $\beta(\omega)$, 定义

$$X_t^\omega = \alpha(\omega) \cos(2\pi\omega t) + \beta(\omega) \sin(2\pi\omega t),$$

则 X_t^ω 自然具有波动频率 ω

- 假设时间序列变量 X_t 可以分解为一系列（无穷小）频率区间上 X_t^ω 的和

$$X_t = \int_{-1/2}^{1/2} X_t^\omega d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} \alpha(\omega) \cos(2\pi\omega t) d\omega + \int_{-1/2}^{1/2} \beta(\omega) \sin(2\pi\omega t) d\omega,$$

则 X_t^ω 可看做 X_t 的周期波动中频率为 ω 的成分

谱函数：非参数估计

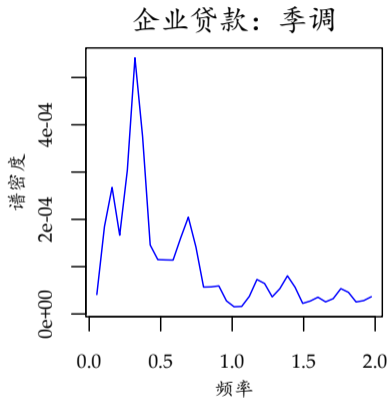
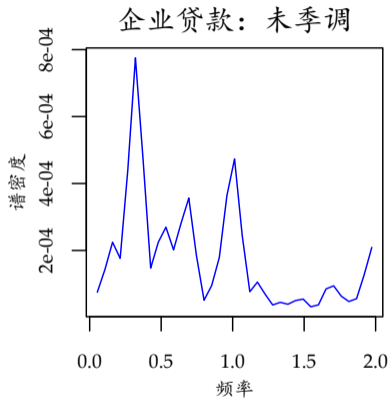
- 由前页表达式可知，谱函数的一个直观样本估计为

$$\hat{s}_X(\omega) = \hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{k=1}^K \hat{\gamma}(k) \cos(2\pi\omega k), \quad \forall \omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

其中 $K < \infty$ 为某一个有限截断期限， $\hat{\gamma}(k)$ 为样本估计

- 统计软件中， $\hat{s}_X(\omega)$ 的默认估计方式更加精细：给定 T 个样本及 $\omega_j \equiv j/T$, $j = 1, \dots, T$ ，通常是选定 $m \in \mathbb{N}$ ，并在一个小区间 $\mathcal{B}_j = \{\omega : \omega_j - m/T \leq \omega \leq \omega_j + m/T\}$ 上取平均计算 $\hat{s}_X(\omega)$, $\omega \in \mathcal{B}_j$
 - 每个 \mathcal{B}_j 有 $L = 2m + 1$ 个离散格点 $\omega_j + k/T$, $k = -m, \dots, m$
 - R 中使用 `spec.pgram` 函数估计样本谱函数时，`span` 选项取值对应了 L ；另一个常用参数 `taper` 控制了临近频率点位谱估计值相互间的干扰，通常取默认值 0.1

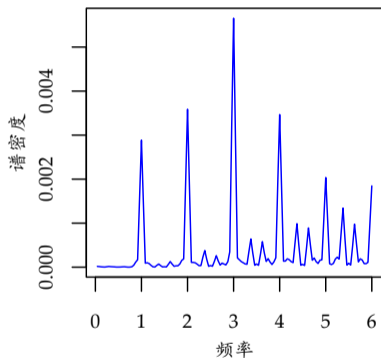
谱密度估计：企业贷款环比增速



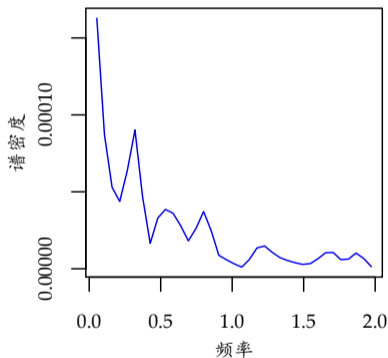
- 横坐标取值上限为 2，对应数据自然频率（季度） $4 \times \frac{1}{2}$ （谱函数半周期定义域）
- 未季调谱密度 $\omega = 1$ 的尖峰对应 $1/(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = 4$ 个时间单位（季度）有一个周期

谱密度估计：货币供应量环比增速

基础货币：未季调



广义货币：季调



- M0 谱密度 $\omega = 1$ 处的尖峰意味着每 $1/(\frac{1}{6}\frac{1}{2}) = 12$ 个月有一个周期，即年度周期； $\omega = 4$ 处的尖峰意味着季度周期 $1/(\frac{4}{6}\frac{1}{2}) = 3$

时间序列的线性滤波

- 最常用的时间序列滤波方法为线性滤波 (linear filter)

- 线性滤波的一般形式

$$X_t^f = \sum_{j=-q}^r c_j X_{t-j} \equiv C(\mathcal{L})X_t$$

其中 $C(\mathcal{L})$ 为滤波算子

- 注意滤波算子中既可以包括 X_t 的滞后项 $j = 1, \dots, r$, 也可以包括超前项 $j = -1, \dots, -q$
- 线性滤波的滞后、超前期限 q, r 均可无穷
- 所得结果 X_t^f 既可以是 X_t 的趋势项, 也可以是周期项, 取决于滤波算子性质

滤波的谱表示： X_t^f 的自协方差

- 为简便，假设 X_t 期望为 0
- 趋势项 X_t^f 的自协方差 $\gamma_f(k) = \mathbb{E}X_t^f X_{t-k}^f$ 为

$$\begin{aligned}
 \gamma_f(k) &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=-q}^r c_j X_{t-j} \right) \left(\sum_{\ell=-q}^r c_\ell X_{t-k-\ell} \right) \\
 &= \mathbb{E} \sum_{j=-q}^r \sum_{\ell=-q}^r c_j c_\ell X_{t-j} X_{t-k-\ell} \\
 &= \sum_{j=-q}^r \sum_{\ell=-q}^r c_j c_\ell \gamma(k + \ell - j)
 \end{aligned}$$

滤波的谱表示： X_t^f 的谱函数

- 由谱函数定义得：

$$s_{X^f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_f(k) e^{-i2\pi\omega k} = \sum_{j=-q}^r \sum_{\ell=-q}^r \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_j c_\ell \gamma(k + \ell - j) e^{-i2\pi\omega k}$$

- 令 $h = k + \ell - j$, 则 $e^{-i2\pi\omega k} = e^{-i\omega(h+j-\ell)} = e^{-i2\pi\omega h} e^{-i2\pi\omega j} e^{i2\pi\omega \ell}$, 故

$$\begin{aligned} s_{X^f}(\omega) &= \sum_{j=-q}^r \sum_{\ell=-q}^r \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_j c_\ell \gamma(k + \ell - j) e^{-i2\pi\omega h} e^{-i2\pi\omega j} e^{i2\pi\omega \ell} \\ &= \sum_{j=-q}^r c_j e^{-i2\pi\omega j} \sum_{\ell=-q}^r c_\ell e^{i2\pi\omega \ell} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i2\pi\omega h} \\ &= C(e^{-i2\pi\omega}) C(e^{i2\pi\omega}) s_X(\omega) \end{aligned}$$

滤波的谱表示：增益函数

- 给定滤波多项式 $C(z) = \sum_{j=-q}^r c_j z^j$, $z \in \mathbb{C}$, 定义增益 (gain) 函数为

$$G(\omega) = |C(e^{-i2\pi\omega})| = \sqrt{C(e^{-i2\pi\omega})\overline{C(e^{-i2\pi\omega})}} = \sqrt{C(e^{-i2\pi\omega})C(e^{i2\pi\omega})}$$

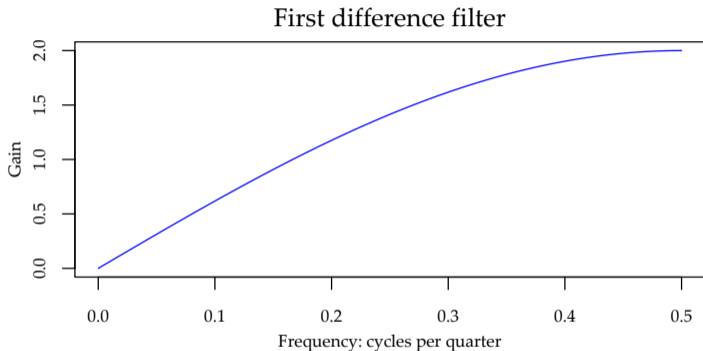
其中 $\overline{C(e^{-i2\pi\omega})}$ 表示 $C(e^{-i2\pi\omega})$ 的复共轭

- 滤波序列的谱函数可写为

$$s_{X^f}(\omega) = G^2(\omega)s_X(\omega)$$

即 X_t 不同频率 ω 处周期性的强弱通过 $G(\omega)$ 放大或者缩小, 转移到 X_t^f 中

1 阶差分滤波



- 1 阶差分滤波算子为 $1 - \mathcal{L}$ ，滤波多项式为 $1 - z$
- 增益函数为 $G(\omega) = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(2\pi\omega)}$

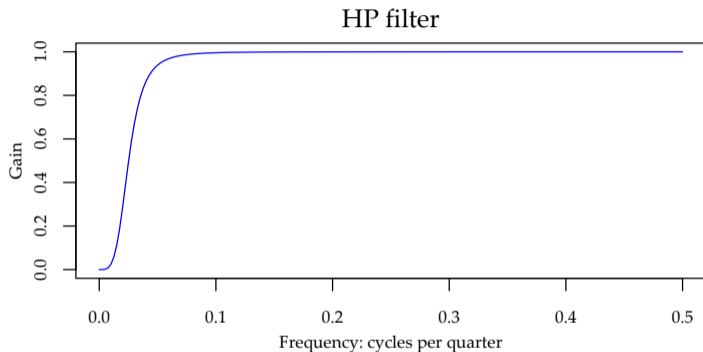
HP 滤波

- 给定样本序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$, HP 滤波 (HP filter) 通过求解最小化问题获得趋势项 $\{\tilde{X}_t\}$:

$$\{\tilde{X}_t\} = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{t=1}^T (X_t - \tilde{X}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} (\tilde{X}_{t+1} - 2\tilde{X}_t + \tilde{X}_{t-1}) \right\}$$

其中 $X_t - \tilde{X}_t$ 即为滤波所得周期项

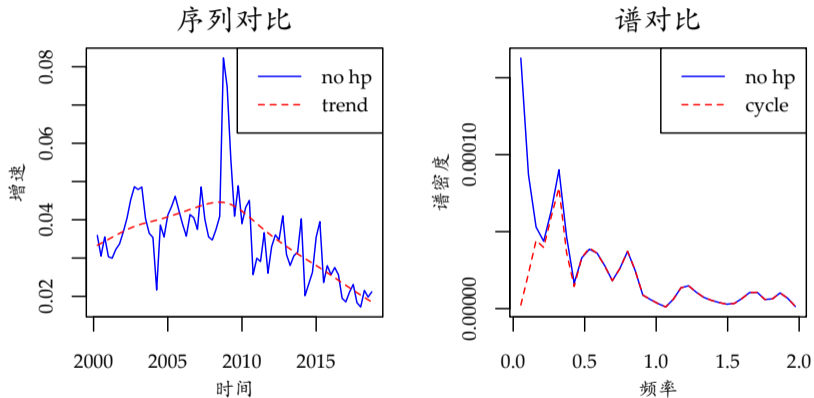
HP 滤波：增益函数



- 增益函数为

$$G(\omega) = \frac{4(1 - \cos(2\pi\omega))^2}{\frac{1}{\lambda} + 4(1 - \cos(2\pi\omega))^2}$$

HP 滤波示例：M2 同比增速，自身无明显季节性



- HP 滤波有效去除了原始增速序列中低频、长周期（趋势）部分