金融工程 2024 年秋 • 时间序列

# 第 2 讲：概率基础

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 9 月 9 日

# 本讲内容

1. 概率空间
2. 1-元随机变量
3. 多元随机变量
4. 独立性

# 符号体系

- 数字：$a, b, c$ 或 $\alpha, \beta, \gamma$
- 数系：实数 $\mathbb{R}$，有理数 $\mathbb{Q}$，整数 $\mathbb{Z}$，自然数 $\mathbb{N}$
- 向量-矩阵：列向量 $\boldsymbol{x}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$，转置 $\boldsymbol{x}^\intercal, \boldsymbol{X}^\intercal$，行列式 $\det \boldsymbol{X}$
- 集合：简单情形时，如 $A, B$；多类符号混用时，如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$
- 集合运算：交 $A \cap B$，并 $A \cup B$，补 $A^c$，空集 $\varnothing$
- 函数：$f(\cdot), F(\cdot)$ 或 $\Phi(\cdot)$
- 概率算符：概率 $\mathbb{P}$，期望 $\mathbb{E}$，方差 $\mathrm{var}$，协方差 $\mathrm{cov}$
- 一般算符：如滞后算符 $\mathscr{L}$
- 数学表达：任意 $\forall$，存在 $\exists$，属于 $\in$，包含于 $\subset$

# 本节内容

# 概率空间：样本空间

概率空间 (probability space)，即三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. $\Omega$：样本空间 (sample space)，一个集合，其元素为各种可能发生的随机状况
   - 如抛硬币，$\Omega = \{H, T\}$，正面、反面；又如 GDP 增速（百分比），$\Omega = [-100, \infty)$
   - 样本空间中的点一般记做 $\omega \in \Omega$，称为样本点 (sample point) 或随机元 (random point)
   - 从经济、金融角度看，$\omega$ 称为状态 (state)，$\Omega$ 称为状态空间 (state space) 更合适

## 概率空间：事件域

2. $\mathcal{F}$：事件域 (event field)，是 $\Omega$ 的部分或全部子集的集合；每个这样的子集表示一个随机事件 (event)
   - 抛硬币，$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$
   - GDP 增速，$\mathcal{F} = \{\Omega$ 中的开、闭区间及其交、并、补集$\}$；具体例子：高增长事件 $= \{\omega > 8\}$，低增长事件 $= \{0 \leq \omega < 6\}$，适度增长 $= \{6 \leq \omega \leq 8\}$

注 数学上，事件域 $\mathcal{F}$ 称为 $\sigma$-域，满足下列要求

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
- $\forall A \in \mathcal{F}$，$A^c \in \mathcal{F}$
- $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

## 事件域：集合运算的涵义

事件域 $\mathcal{F}$ 是集合——随机事件——的集合

- 并集：给定 $A, B \in \mathcal{F}$，$A \cup B$ 表示事件 $A$ 或 $B$ 至少发生其一的事件
  - 高增长事件 $\cup$ 适度增长事件 $= \{\omega \geq 6\}$，表示 GDP 增速处于适度或高增速状态
- 交集：$A \cap B$ 表示事件 $A$ 和 $B$ 同时发生的事件
- 补集：$A^c$ 表示事件 $A$ 没有发生

练习 解释 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 和 $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的涵义

## 概率空间：概率测度

3. $\mathbb{P}$：概率测度 (probability measure)，简称概率；给出事件域 $\mathcal{F}$ 中每个事件的可能性大小；可看做函数 $\mathbb{P}:\mathcal{F}\longrightarrow[0,1]$，满足两条性质
   - $\mathbb{P}(\varnothing)=0, \mathbb{P}(\Omega)=1$
   - 给定 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathcal{F}$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing\ \forall i,j=1,\ldots,\infty$，则

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i).$$

这一性质又称概率测度的可数可加性 (countably additive)

**练习** 考虑 $\Omega=[0,1]$，$\mathcal{F}$ 为其所有区间及其可数并、补集的集合，令 $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow[0,1]$ 为 $\mathcal{F}$ 上的函数，取值为 $\mu([a,b])=(b-a)^2$，$\forall 0\leq a<b\leq 1$。请问 $\mu$ 是概率测度吗？

## 本节内容

## 随机变量：定义

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- 随机变量 (random variable, r.v.) $X$ 是从 $\Omega$ 到实数的一个函数，
  $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
  - $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 表示随机变量可以取值正负无穷；但后续不考虑
  - 抛硬币示例：$\omega = H, T$，定义 $X(H) = 0, X(T) = 1$，则 $X$ 的 0-1 取值反映正负面
  - GDP 增速示例：$\omega \in [-100, \infty)$，定义 $X(\omega) = \omega$，则 $\omega$ 即表示状态又表示 GDP 增速随机变量的取值
- 这个函数需要满足可测 (measurable) 的要求：

$$\underbrace{\{\omega : X(\omega) \leq x\}}_{\text{事件}} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**练习** 上面两个例子满足可测性吗？

## 随机变量：分布函数

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 $X$

- 根据定义，$\forall x \in \mathbb{R}$，事件 $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$，故 $\mathbb{P}$ 可给出该事件的概率
- $\forall x \in \mathbb{R}$，称

$$F(x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

  为 $X$ 的累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF)，简称为分布函数
    - $\{\omega : X(\omega) \leq x\}$ 一般简记为 $\{X \leq x\}$
- 分布函数单调递增：$\forall x, y \in \mathbb{R}$，若 $x < y$，则 $F(x) \leq F(y)$
    - $F$ 可能出现跳跃；但利用概率 $\mathbb{P}$ 的可数可加性，可说明 $F$ 右连续、左极限存在（稍微复杂些的练习）
- 分布函数左 0 右 1：$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

# 随机变量：离散型

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 $X$

- 如果 $X$ 取值是离散的 (discrete)，如抛硬币中 $X = 0, 1$，则称 $X$ 为<u>离散型</u> r.v.；$X$ 的取值集合可以有限，也可以是可数集（无穷）
  - 若 $X$ 取值集合为 $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$，则其分布函数 $F$ 是一个阶梯函数，在 $x_i$ 处往上跳跃
  - 此时，通常用 $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-)$ 表示 $X$ 的分布；$F(x_i-) = \lim_{x \uparrow x_i} F(x)$ 表示左极限
- 除此之外，$X$ 取值可以是连续的 (continuous)，如 GDP 增速；或更一般的离散、连续混合

## 随机变量：连续型

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上的一个随机变量 $X$

- 一般来说，当 $X$ 取值连续时，其分布函数也可以有跳跃
  - 高速公路上汽车行使速度的分布在限速位置就有跳跃——很多汽车保持在限速，但也有部分超过或者低于限速
- 一类特别的连续取值 r.v.：$X$ 称为连续型 r.v.，如果其分布函数 $F$ 可写为另一个非负函数 $f$ 的积分

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y) \mathrm{d}y$$

  此时称 $f$ 为 $X$ 的密度函数 (density function, DF)

## 随机变量：密度函数与分布函数

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的连续型 r.v. $X$，CDF $F$，DF $f$

- 此时 $F$ 一定是连续函数
- 在非精确意义下，$f(x) = F'(x)$
  - $F$ 不一定是处处可微，但一定是“几乎”处处可微
- $\forall a < b$，

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

特别的，$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(-\infty \le X \le \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$

练习　继续第 8 页练习中的 $\Omega, \mathcal{F}$，令 $\mathbb{P}([a,b]) = b^2 - a^2$，请问 $\mathbb{P}$ 是概率测度？并定义 $X(\omega) = \omega \in \Omega$，求 $X$ 的 CDF 及 DF

## 1-元随机变量：常见分布

很多情况下，有了 r.v. 的 CDF 或 DF 后，我们不必再关心 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 本身；r.v. 的概率/统计信息都在分布中

- 典型离散分布，r.v. $X$，取值集合记为 $\mathcal{V}$
  - 两点分布，又称 Bernoulli 分布：$\mathcal{V} = \{0, 1\}$，$\mathbb{P}(X = 0) = p$
  - 二项式分布：$\mathcal{V} = \{0, 1, \dots, n\}$，$\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$，$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$，$p \in (0, 1)$
  - Poisson 分布：$\mathcal{V} = \mathbb{N} \equiv \{0, 1, \dots\}$，$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$，$\lambda > 0$
- 典型连续分布
  - 均匀分布 $U([a, b])$：$\mathcal{V} = [a, b]$，$f(x) = \frac{1}{b-a}$
  - 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$：$\mathcal{V} = \mathbb{R}$，$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
  - 指数分布 $\exp(\lambda)$：$\mathcal{V} = \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$，$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$，$\lambda > 0$

# 1-元随机变量：矩

给定 r.v. $X$ 及其 CDF $F$

- $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，定义 $X$ 的 $\alpha$-阶矩 (moment)：

$$\mathbb{E}[X^\alpha]=\int x^\alpha \mathrm{d}F(x)$$

积分限由 $X$ 的取值范围 $\mathcal{V}$ 决定

注 上面的积分可理解为 Riemann-Stieltjes 积分

- 与 $g(x)$ 为被积函数的 Riemann 积分定义中对 $x$ 进行分划，令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}\to 0$，取离散和 $\sum_k g(x_k)\Delta x_k$ 极限类似，此处对 $\sum_k g(x_k)\Delta F(x_k)=\sum_k g(x_k)[F(x_k)-F(x_{k-1})]$ 取极限
- 对离散型 r.v.，上述积分自然转化为离散和 $\sum_i x_i^\alpha p_i$
- 对连续型 r.v.，形式上 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，上述积分化为常规 Riemann 积分形式 $\int x^\alpha f(x)\mathrm{d}x$

## 1-元随机变量：期望与方差

- $X$ 的 1-阶矩称为 $X$ 的期望 (expectation)，记做 $\mathbb{E}X$ 或 $\mu_X$
- $X$ 的方差 (variance) 定义为

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

又称为 2-阶中心矩

练习 证明 $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$

- $X$ 的标准差 (standard deviation) 定义为 $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$

练习 计算上述 6 个典型分布的期望、方差和标准差

# 本节内容

## 多元随机变量：联合分布

给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 及其上定义的 $n$ 个 r.v. $X_1, \ldots, X_n$

- 多元随机事件：$\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\}$ 表示 $\{X_1 \le x_1\}, \ldots, \{X_n \le x_n\}$ $n$ 个事件同时发生，即

$$\{X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\} = \bigcap_{1 \le i \le n} \{X_i \le x_i\} \in \mathcal{F}$$

- $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，$X_1, \ldots, X_n$ 的联合累积分布函数 (joint CDF) 定义为

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n)$$

简称为联合分布 (joint distribution)

# 多元随机变量：离散型

给定 $n$ 个 r.v. $X_1, \ldots, X_n$

- 离散型：$\forall i$，$X_i$ 为离散取值；此时 $X_1, \ldots, X_n$ 的联合分布就是一个 $n$-维数组 $\{p_{i_1,\ldots,i_n}\}$，其中

$$p_{i_1,\ldots,i_n} = \mathbb{P}(X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_n = x_{i_n})$$

  $x_{i_k}$ 表示 $X_k$ 的第 $i_k$ 个取值
  - 注意和联合累计分布之间概念上的差别
  - 2-元离散随机变量 $X, Y$ 对应的分布可表示为一个矩阵 $[p_{ij}]$，其中 $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

# 多元随机变量：连续型

给定 $n$ 个 r.v. $X_1,\ldots,X_n$

- 连续型：此时联合分布可以写为非负函数 $f(y_1,\ldots,y_n)$ 的多元积分

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(y_1,\ldots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$

  $f$ 称为 $X_1,\ldots,X_n$ 的联合密度函数 (joint DF)

- 与 1-元情形类似，非精确意义下

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$$

## 多元随机变量：边缘分布

给定 $n$ 个 r.v. $X_1, \ldots, X_n$ 及联合分布 $F$

- $X_i$ 的边缘分布 $F_i(x_i)$ 仍然定义为 $\mathbb{P}(X_i \le x_i)$，其与联合分布的联系为

$$\begin{aligned} F_i(x_i) &= \mathbb{P}(\{X_i \le x_i\} \cap \Omega \cap \cdots \cap \Omega) \\ &= \mathbb{P}\Big(\{X_i \le x_i\} \cap \textstyle\bigcap_{j \ne i} \{X_j \le \infty\}\Big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \le \infty, \ldots, X_i \le x_i, \ldots, X_n \le \infty) \\ &= F(\infty, \ldots, x_i, \ldots, \infty) \end{aligned}$$

练习 对 2-元离散 r.v. $X, Y$ 及联合分布 $p_{ij}$，将 $X$ 的边缘分布 $p_i$ 写为 $p_{ij}$ 的求和形式

练习 对 2-元连续 r.v. $X, Y$ 及联合密度 $f(x, y)$，将 $X$ 的边缘分布 $F_X$ 写为 $f$ 的 2-元积分形式

# 多元随机变量：混合矩

给定 $n$ 个 r.v. $X_1, \ldots, X_n$ 及联合分布 $F$

- $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$，令 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$，则 $X_1, \ldots, X_n$ 的混合 $\boldsymbol{\alpha}$-阶矩定义为

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}] = \int x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n)$$

此处亦可理解为多元 Riemann-Stieltjes 积分

注 1-元情形下，$\mathrm{d}F(x)$ 对应离散和中的项为 $F(x+\Delta x) - F(x) = \mathbb{P}(X \in [x, x+\Delta x])$，即 $X$ 处于 $x$ 附近的概率；多元情形下，$\mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n)$ 表示 $X_1, \ldots, X_n$ 处于 $(x_1, \ldots, x_n)$ 附近的概率

## 多元随机变量：离散/连续型分布下的混合矩

- 离散情形：混合矩可写为多重求和

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}] = \sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n} x_{i_1}^{\alpha_1}\cdots x_{i_n}^{\alpha_n} p_{i_1,\dots,i_n}$$

- 连续情形：混合矩可写为多重积分

$$\mathbb{E}[X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}] = \int\cdots\int x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

- 一般的多元 r.v. 混合矩用处有限；重要的是 2-元随机变量的混合 2-阶矩

## 2-元随机变量：协方差及相关系数

给定 r.v. $X, Y$ 及其联合分布 $F(x, y)$

- $X, Y$ 的<u>混合 2-阶矩</u> (cross moment) 定义为

$$\mathbb{E}[XY] = \int xy\mathrm{d}F(x, y)$$

- $X, Y$ 的<u>协方差</u> (covariance) 定义为

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

**练习** 证明 $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

- $X, Y$ 的<u>相关系数</u> (correlation) 定义为 $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

# 随机向量：均值

将 r.v. $X_1, \ldots, X_n$ 列为一个列向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\mathsf{T}$

- 该向量称为随机向量 (random vector)
- 以 $\mathbb{E}\boldsymbol{X}$ 表示各分量的期望组成的列向量

$$\boldsymbol{\mu}_X \equiv \mathbb{E}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ \mathbb{E}X_n \end{bmatrix}$$

## 随机向量：协方差矩阵

- 矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}_X = \begin{bmatrix} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵 (covariance matrix)

- 注意区分矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与求和号 $\sum$
- 多元正态分布：$\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n] \sim N(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$，令 $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$，其密度函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Sigma}_X}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^\mathsf{T} \boldsymbol{\Sigma}_X^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_X) \right\}$$

## 随机向量：协方差矩阵的简化表示

由定义 $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)]$，可将 $\boldsymbol{\Sigma}_X$ 改写为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_X &= \mathbb{E}\begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \cdots & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \cdots & (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_n - \mathbb{E}X_n) \end{bmatrix} \\
&= \mathbb{E}\begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 & \cdots & X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)^\top\right] \\
&= \mathbb{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top] - \boldsymbol{\mu}_X \boldsymbol{\mu}_X^\top
\end{aligned}
$$

## 随机向量：线性变换

给定 $n$-维随机向量 $X = [X_1, \ldots, X_n]^\top$ 和 $m \times n$ 常数矩阵 $A$

- $Y = AX$ 是一个 $m$-维随机向量
- $Y$ 的期望是 $X$ 的线性变换

$$\mu_Y = \mathbb{E}Y = \mathbb{E}AX = A\mathbb{E}X = A\mu_X$$

- $Y$ 的协方差矩阵 $\Sigma_Y$ 可写为

$$\begin{aligned}\Sigma_Y &= \mathbb{E}[YY^\top] - \mu_Y\mu_Y^\top \\ &= \mathbb{E}[AXX^\top A^\top] - A\mu_X\mu_X^\top A^\top \\ &= A\left(\mathbb{E}[XX^\top] - \mu_X\mu_X^\top\right)A^\top \\ &= A\Sigma_X A^\top\end{aligned}$$

## 本节内容

# 随机变量独立性：定义

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，两个事件 $A, B \in \mathcal{F}$ 若满足

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

  则称为独立 (independent) 事件

- 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的两个 r.v. $X, Y$，若 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 满足

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)$$

  则称两个 r.v. 相互独立

- 若 $X, Y$ 相互独立，则其联合分布 $F$ 为两个边缘分布 $F_X, F_Y$ 的乘积

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

## 随机变量独立性：性质

给定两个独立的 r.v. $X, Y$

- $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为两个函数，则 $f(X), g(Y)$ 相互独立
  - 严格说，需要 $f, g$ 满足可测性条件
- 乘积的期望等于期望的乘积

$$\mathbb{E}[XY] = \int xy\mathrm{d}F(x, y) = \int xy\mathrm{d}F_X(x)\mathrm{d}F_Y(y) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

- 协方差为 0，

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$$

故相关系数为 0

## 随机变量独立性：多元一般情形

给定 r.v. $X_1, \ldots, X_n$

- 若 $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，满足

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x_i)$$

  则称 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立

- 若 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，则 $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ 相互独立，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] &= \int x_1 \cdots x_n \mathrm{d}F(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int x_1 \cdots x_n \mathrm{d}F_1(x_1) \cdots \mathrm{d}F_n(x_n) = \mathbb{E}X_1 \cdots \mathbb{E}X_n\end{aligned}$$

## 大数定律 (law of large number, LLN)

### 定理 1

当 $\{X_t\}$ 为独立同分布 (independent and identical distribution, iid) 随机变量序列时，样本均值以概率 1 收敛到总体均值 $\mu \equiv \mathbb{E}X_t$：

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t(\omega) = \mu\right\}\right) = 1,$$

记做

$$\hat{\mu}_T \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu,$$

其中，a.s. 表示 almost surely，意为几乎一定；以概率 1 收敛，又称为几乎处处 (almost everywhere) 收敛

# 中心极限定理 (central limit theorem, CLT)

- 考虑 iid 样本 $\{X_t\}$，期望为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$
- 由大数定律，$\hat{\mu}_T - \mu = T^{-1}\sum_t (X_t - \mu) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$
- 计算可得，$\text{var}(\hat{\mu}_T) = \sigma^2/T$，故 $\hat{\mu}_T$ 的标准化

$$\xi_T = \frac{\hat{\mu}_T - \mu}{\sqrt{\text{var}(\hat{\mu}_T)}} = \frac{T^{-1}\sum_t (X_t - \mu)}{\sqrt{T}^{-1}\sigma} = \sqrt{T}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{X_t - \mu}{\sigma}$$

方差为 1

## 定理 2

假设有 iid 序列 $\{X_t\}$，则其标准化样本均值 $\xi_T \xrightarrow{\text{d}} N(0,1)$，或等价的，$\sqrt{T}(\hat{\mu}_T - \mu) \xrightarrow{\text{d}} N(0,\sigma^2)$，其中 $\xrightarrow{\text{d}}$ 表示依分布收敛

# CLT：Monte Carlo 模拟示例