金融工程 2024 年秋 • 时间序列

第 13 讲：随机波动率与条件异方差模型

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2024 年 11 月 25 日

本讲内容

1. 波动率的时间序列特征
2. ARCH 模型
3. GARCH 模型

本节内容

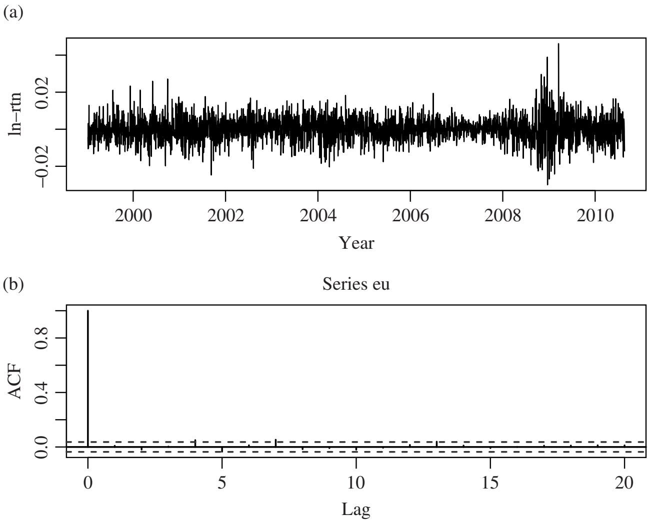
1. 波动率的时间序列特征
2. ARCH 模型
3. GARCH 模型

金融时间序列中的波动率动态特征

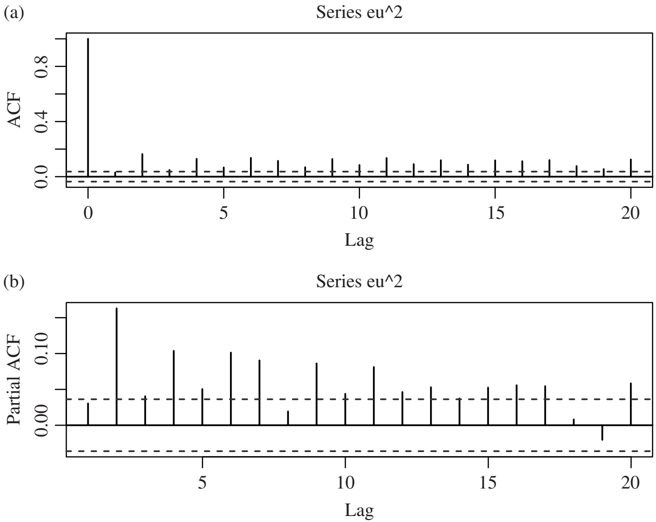
随机波动率 (stochastic volatility)：金融时间序列（如收益率）各个时期的波动水平并非恒定不变，而会随时间发生变化；可总结为如下特征

1. 波动率聚集 (clustering)：波动率会在一定时期（通常较短）明显变高，而在其他时期（通常较长）维持低位
2. 波动率的跳跃不常见，而倾向于连续变化
3. 波动率是在有限范围内变化，而不会趋近于无穷
4. 时间序列自身的水平值发生较大变化后，波动率通常会增加
    - 如资产价格序列发生明显上升或下降后，其波动率会出现上升趋势

示例：美元-欧元汇率日度收益率及自相关性，1999.1.4–2010.8.4



示例：前页收益率平方项具有自相关性



随机波动率：理论内涵与测算

- 随机波动率旨在捕捉可观测的时间序列 $\{X_t\}$ 的二阶矩随时间随机变化的特征
  - 以收益率序列 $\{r_t\}$ 为例，若 Ω_{t-1} 表示 $t-1$ 期的信息集（如到该期为止所有的公开信息，包括收益率本身），则可计算条件期望收益及其条件方差

$$\mu_t = \mathbb{E}[r_t|\Omega_{t-1}], \quad \sigma_t^2 = \mathbb{E}[(r_t-\mu_t)^2|\Omega_{t-1}]$$

    后者即称为 $\{r_t\}$ 的（条件）波动率
  - 随机波动率：若 σ_t^2 为具有一定概率结构的随机过程
- 随机波动率的理论测度：$\sigma_t^2 = \mathbb{E}[(X_t-\mu_t)^2|\Omega_{t-1}]$ 的计算依赖于对 $\{X_t\}$ 时序模型的设定

随机波动率：样本测算与近似

- 给定样本 $\{X_t\}_{t=1}^T$，虽然 σ_t^2 的理论值依赖于模型设定，但仍然可以通过 X_t^2，反映其波动率的随机动态特征
  - 第 5 页计算收益率平方项自相关系数及偏自相关系数的原因
  - 更精确的“直接”测算：建立 $\{X_t\}$ 本身水平值的时序模型，如 AR(p)，则可以计算 $t-1$ 期 X_t 的最小均方预测 $\hat{X}_{t|t-1}$，进而用预测误差平方项 $(X_t - \hat{X}_{t|t-1})^2$ 来刻画潜在的随机波动率
- 另一种方法：不同时间段波动率实现值 (realized volatility)
  - 如用每个月各个日度回报率来计算该月的实现波动率
  - 或者更为粗糙但常用的滚动窗口波动率 (rolling window volatility)：用 t 到 $t-m$ 期的实现值 $\{X_{t-i}\}_{i=0}^m$ 来计算样本方差 $\hat{\sigma}_{m,t}^2$

本节内容

1 波动率的时间序列特征

2 ARCH 模型

3 GARCH 模型

ARCH 模型的基本结构

- ARCH (autoregressive conditional heteroskedastic) 模型：自回归条件异方差，Robert Engle 1982 年提出
- m-阶 ARCH 模型 ARCH(m) 的经典表示：给定 iid 白噪声过程 $\{v_t\}$，期望 $\mathbb{E}v_t = 0$，方差 $\sigma_v^2 = 1$，则 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ 称为 ARCH(m) 模型，若 h_t 满足

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$$

- 参数限制：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 并不能任意取值，而需要满足一些列限定条件，才能保证 h_t 进而 u_t 有意义
- 常用记号：经常将 h_t 记做 σ_t^2，便于提示“随机波动率”的本意

ARCH 模型的性质：条件期望与方差

- 定义信息集 $\Omega_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots\}$，则 v_t 独立于 Ω_{t-1}
- 进一步有，$\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t}\mathbb{E}[v_t|\Omega_{t-1}] = \sqrt{h_t}\mathbb{E}v_t = 0$
- 由 ARCH 模型的定义可知 $u_t^2 = h_t \cdot v_t^2$，则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] &= \mathbb{E}\Big[(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2) v_t^2 |\Omega_{t-1}\Big] \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2)\mathbb{E}[v_t^2|\Omega_{t-1}] \\
&= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2
\end{aligned}
$$

  其中第 2 个等号的原因在于 $\mathbb{E}[v_t^2|\Omega_{t-1}] = \mathbb{E}[v_t^2] = 1$

- 由此知，u_t 的条件方差 $\sigma_{u,t}^2 \equiv \mathrm{var}(u_t|\Omega_{t-}) = \mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}]$ 由其自身的滞后项平方决定

ARCH 过程参数限制

- 首先，由于 $\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$，为确保右端取值大于 0，故要求

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0 \tag{1}$$

- 其次，由于 $\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$ 具有一个以 u_t^2 为变元的 AR(m) 过程，因此要求其所对应的特征多项式 $P(z)$ 满足

$$P(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_m z^m \neq 0, \quad \forall |z| \leq 1 \tag{2}$$

即 $P(z)$ 所有零点位于复平面单位圆外

ARCH 过程的无条件矩

- 由 $\mathbb{E}[u_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[0] = 0$ 可知 u_t 的 1-阶矩平稳
- 由

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}]] = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}[u_{t-1}^2] + \cdots + \alpha_m \mathbb{E}[u_{t-m}^2]$$

可知，若 $\mathbb{E}[u_t^2]$ 平稳，则

$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m}$$

- $P(z)$ 零点位于单位圆外意味着 $P(1) = 1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m \neq 0$，故 u_t 无条件 2-阶矩大于 0 进一步限制了参数取值

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m < 1 \tag{3}$$

ARCH 过程是鞅差过程

- ARCH 过程满足鞅差过程的定义：$\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}] = 0$
- 故 ARCH 过程不具有序列相关性：$\forall j = 1, 2, \ldots,$

$$\mathbb{E}[u_t u_{t-j}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[u_t u_{t-j}|\Omega_{t-1}]] = \mathbb{E}[u_{t-j}\mathbb{E}[u_t|\Omega_{t-1}]] = 0$$

即 $\mathrm{cov}(u_t, u_{t-j}) = 0$

ARCH 模型的回归表示

- 定义 $\eta_t \equiv u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}]$，则可直接验证 $\{\eta_t\}$ 为鞅差序列，$\mathbb{E}[\eta_t] = \mathbb{E}[\eta_t|\eta_{t-1}, \eta_{t-2}\ldots] = \mathbb{E}[\eta_t|\Omega_{t-1}] = 0$
    - 当参数 $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ 满足进一步条件时，可以证明 $\mathbb{E}[\eta_t^2]$ 存在，故 $\{\eta_t\}$ 是序列无关、鞅差白噪声过程
- 由 $\mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2$，可得 ARCH 模型的平方项自回归 AR($m$) 表示：

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m u_{t-m}^2 + \eta_t$$

- 此回归表示可用来对 ARCH 模型进行估计，选择阶数 m，预测波动率，或检验序列 $\{u_t\}_{t=1}^T$ 是否具有 ARCH 特征
    - 借助上式可说明 $P(z)$ 满足条件 (2) 时，u_t^2 方为平稳序列

ARCH 模型的极大似然估计

- ARCH 模型的常规估计方法为极大似然估计
- 假设 $v_t \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$，则 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$ 在 Ω_{t-1} 下的条件概率密度为 $f(u_t|\Omega_{t-1}) = (2\pi h_t)^{-1} \exp(-0.5u_t^2/h_t)$
- 给定 ARCH(m) 样本序列 $\{u_t\}_{t=1}^T$，$T > m$，则条件似然函数

$$L(u_{m+1},\ldots,u_T|\boldsymbol{\alpha},u_1,\ldots,u_m) = \prod_{t=m+1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{u_t^2}{2h_t}\right)$$

  其中 h_t 可以通过 $u_{t-1},\ldots$ 等递归定义，$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0,\ldots,\alpha_m]^{\mathsf{T}}$
- 另一个常见分布假设为 v_t 服从 iid 的 Student t-分布

本节内容

1 波动率的时间序列特征

2 ARCH 模型

3 GARCH 模型

ARCH 模型的优点与缺点

优点

1. 可以产生波动率聚集：$h_t = \sigma_t^2$ 增加，导致 u_t^2 上升，进而导致 $h_{t+1} = \sigma_{t+1}^2$ 上升
2. u_t 序列有厚尾特征：可计算 u_t 峰度（当存在时）大于 3

缺点

1. ARCH 模型对参数取值限制较多
2. ARCH 模型的简单自回归结构导致其无法捕捉波动率变动的高频结构，进而容易造成波动率过度预测
3. ARCH 模型无法区分波动率变动的非线性特征，下一期波动率只取决于冲击 v_t 的平方
4. ARCH 模型并没有真正解释波动率变化的来源，而只是对其时序特征进行建模

GARCH 模型的基本结构

- ARCH 模型的缺点带动了大量的后续研究，其中应用最广泛也最成功的，为 GARCH (generalized ARCH) 模型：Engle 的学生 Bollerslev 提出
  - GARCH 模型可以克服前述缺点 2，其拓展可以进一步克服缺点 3
- GARCH 模型 GARCH(m,s) 的经典表示：类似 ARCH，给定 $u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t$，条件方差 h_t 满足

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j}$$

- 与 ARCH 类似，此时有

$$\mathbb{E}[u_t^2 | \Omega_{t-1}] = h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j}$$

GARCH 模型的特征

- 与 ARCH 类似，定义 $\eta_t = u_t^2 - \mathbb{E}[u_t^2|\Omega_{t-1}] = u_t^2 - h_t$，则 $\{\eta_t\}$ 为鞅差白噪声过程，且 $h_t = u_t^2 - \eta_t$
- 此时，h_t 定义式可以改写为

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \beta_i)u_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\eta_{t-j}$$

  其中 $p = \max(m, s)$；上式中对 $i > m$，补充定义 $\alpha_i = 0$，对 $i > s$ 补充定义 $\beta_i = 0$
- 由上式可知，GARCH 模型下 u_t^2 是一个 ARMA$(\max(m,s), s)$ 过程，其 MA(s) 部分可以捕捉波动率变动的高频特征

GARCH 模型的参数限制

- 为保证 h_t 非负，需要 $\alpha_0, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_s \geq 0$
- 为保证 u_t^2 平稳，需要其 ARMA 表示中 AR 部分特征多项式

$$P(z) = 1 - (\alpha_0 + \beta_0)z - \cdots - (\alpha_p + \beta_p)z^p \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |z| \leq 1$$

- 为保证

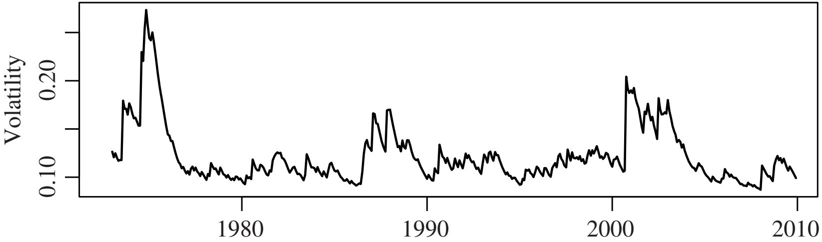
$$\mathbb{E}[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \beta_i)} > 0$$

需要 $\alpha_0 > 0$ 与 $\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \beta_i) < 1$

GARCH 估计与示例

GARCH 模型通常也使用极大似然估计，其阶数确定可通过 AIC、BIC 等模型选择算法

- R 宏包 fGarch 提供了丰富的 GARCH 建模与分析选项
- 下图显示了对 Intel 股票 1973M1 到 2009M12 月度收益率进行 GARCH(1, 1) 建模估计得到的波动率序列 $\sigma_t^2 = h_t$



常见 GARCH 模型拓展

- I-GARCH 模型：单整 (integrated) GARCH，例如 I-GARCH(1,1) 模型

$$u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t, \quad h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + (1-\beta_1) u_{t-1}^2, \quad 0 < \beta_1 < 1$$

  此时 u_t^2 是一个单位根过程

- M-GARCH 模型：均值 (mean) GARCH 模型，例如 M-GARCH(1,1) 模型

$$r_t = \mu + c h_t + u_t, \quad u_t = \sqrt{h_t} \cdot v_t, \quad h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

  可用来捕捉金融资产收益率序列 $\{r_t\}$ 中，收益率水平值对波动率的依赖关系

- E-GARCH 模型：指数 (exponential) GARCH 模型，条件波动率具有非对称性，可用于捕捉金融收益率正负取值对未来波动率的差异化影响