

2023 秋季本科时间序列

第 6 次作业

提交日期：11 月 13 日

注意：本次作业可以参考去年作业 6。

1. 考虑平稳 AR(1) 过程 $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, T$, $\varepsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$, $|\phi| < 1$.
 - (a) 计算随机向量 $\mathbf{Z}_t = [1, X_{t-1}]^\top$ 的交叉二阶矩矩阵 $\mathbf{M} = \mathbb{E}\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t^\top$, 并说明该矩阵满秩。
 - (b) 固定 $\mu = 1$, 考虑 $\phi = 0.5, 0.8, 0.99$, 分别记为 $\phi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. 给定 $\phi^{(i)}$, 请在 R 或 Python 中编程, 生成 $X_t^{(i)}$ 的随机模拟序列, $T = 1000$, 起始值为 $X_0^{(i)} = \mathbb{E}^{(i)}X_t = \mu/(1 - \phi^{(i)})$. 绘图展示这 3 个模拟序列, 仿照第 5 讲课件使用 R 的 `spec.pgram` 函数 (或 Python 对应函数) 计算 3 个时间序列的样本谱密度函数的估计, 并与其理论谱密度函数进行对比. 提示: `spec.pgram` 函数估计样本谱密度, 需要对设定 `span` 与 `taper` 两个参数, 请自行调整优化, 使得样本谱密度估计值较为平滑。
 - (c) 固定 (b) 中 3 个模拟序列不变, 对每个序列 $\{X_t^{(i)}\}$, 按照每新增 100 个样本, 进行 OLS 估计; 即 $k = 1, \dots, 10$, 对样本 $\{X_t^{(i)} : t = 1, \dots, 100k\}$ 进行 OLS 估计, 估计结果记为 $\hat{\beta}^{(i),k}$. 对每一个 i , 绘制 $\hat{\beta}^{(i),k}$ 关于 k 的序列图. 注意该向量有两个元素, 分开绘图. 请讨论随着 ϕ 的增大, OLS 估计随样本量 $100k$ 增加时的收敛性有何变化。
 - (d) 给定 (b) 中 $\phi^{(i)}$ 取值, $i = 1, 2, 3$, 并定义 $\beta_0^{(i)} = [\mu, \phi^{(i)}]^\top$. 按照每次生成 $T = 100$ 个 $\{X_t^{(i)}\}$ 模拟样本的方式, 重复生成 1000 组样本 $\{X_t^{(i),j}\}$, $j = 1, \dots, 1000$. 对每组样本 $\{X_t^{(i),j}\}$, 进行 OLS 估计得到系数向量 $\hat{\beta}^{(i),j}$. 得到 1000 个系数估计向量后, 绘制 $\hat{\beta}^{(i),j} - \beta_0^{(i)}$ 关于 j 的样本直方图. 注意每个估计向量有两个系数, 分开绘图. 对 1000 组估计值, 计算这两个系数的样本标准差 $\hat{\sigma}(\hat{\mu}), \hat{\sigma}(\hat{\phi})$, 并在系数估计值样本直方图中, 分别添加以 $\mu, \phi^{(i)}$ 为均值、样本标准差 $\hat{\sigma}(\hat{\mu}), \hat{\sigma}(\hat{\phi})$ 为标准差的正态分布密度曲线, 对比样本分布与正态分布间的差异; 并讨论当 DGP 中 ϕ 趋近 1 时, 两个系数估计值样本分布与理论预测的正态分布间的差别。
 - (e) 请根据课件内容, 对每组参数取值 i , 计算 $T = 100$ 期样本 AR(1) 序列系数 OLS 估计值 $\hat{\beta}^{(i)}$ 系数向量的理论与样本渐近协方差矩阵; 其中前者用 σ_ε^2 及 \mathbf{M} 的总体值计算, 后者用样本估计的 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ 与 $\hat{\mathbf{M}}$ 计算. 从渐近协方差矩阵中, 计算两个系数各自的理论与样本渐近标准误, 并对比与 (e) 中所得系数估计值样本标准差的关系. 此外, 根据理论与样本渐近协方差矩阵, 讨论两个系数估计值间的相关性特征。
 - (f) 重复 (d)–(e) 的内容, 但取 $T = 900$. 比较此时系数估计值理论与样本渐近标准误与 100 组样本所得估计系数样本标准差的关系. 此时估计系数的样本标准差是否近似为 (b) 中的 1/3? 样本渐近标准误与 (e) 相比呢?