2021 秋季本科时间序列

第 9 次作业

提交日期：12 月 21 日

1. 考虑 2-元变量 VAR(1) 过程 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声，

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ -0.4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

   $\boldsymbol{\Omega}$ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的协方差矩阵。

   (a) 请验证 $\boldsymbol{X}_t$ 的平稳性，并计算期望 $\mathbb{E}\boldsymbol{X}_t$。

   (b) 请计算 $\boldsymbol{X}_t$ 的 MA(∞) 展开，再进一步计算协方差矩阵 $\mathrm{var}(\boldsymbol{X}_t)$。提示：请先计算 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征值分解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $\boldsymbol{\Phi}^i$ 表达式。

   (c) 请计算 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 Cholesky 分解 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\intercal}$，任选一项计算 $\boldsymbol{X}_{t+s}$ 关于正交化后的冲击 $\boldsymbol{u}_t = [u_{1t}, u_{2t}]^{\intercal} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的脉冲响应函数:

$$\frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{1t}}, \qquad \frac{\partial X_{1t+s}}{\partial u_{2t}}, \qquad \frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{1t}}, \qquad \frac{\partial X_{2t+s}}{\partial u_{2t}}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

2. 考虑一个 AR(1) 过程 $X_t = \rho X_{t-1} + u_t$，$|\rho| < 1$，不可观测的冲击项 u_t 为一个平稳 ARCH 过程 $u_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2}\,\varepsilon_t$，$\varepsilon_t$ 为 iid 白噪声且方差为 1。

   (a) 请验证 ρ 的 OLS 估计 $\hat{\rho}$ 依然具有一致性。

   (b) 参考课件 9，请推导 $\sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho)$ 渐近正态分布的方差表达式；注意，此时条件同方差假设不满足，需要使用条件异方差的推导方法。

   (c) 上述推导需要知道 α_0, α_1 的参数取值吗？

   (d) 给定样本 $\{X_t\}_{t=0}^{T}$，请说明按照 (c) 中结果如何计算 $\hat{\rho}$ 的异方差稳健渐近标准误。若已知 α_0, α_1 的取值，请思考能否利用该参数取值改进 $\hat{\rho}$ 渐近标准误的计算。

3. 考虑 AR(1) 过程 $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t$ 为 iid 白噪声。

   (a) 若 ρ 的真实值为 1，请利用第 14 讲课件内容，证明此时 OLS 估计量 $\hat{\rho}$ 满足如下超一致性 (super consistency)：对任意的 $\delta > 0$，$T^{1-\delta}(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$。

   (b) 若 ρ 的真实值满足 $|\rho| < 1$，请证明 $T(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{\text{a.s.}} -\infty$。