2021 秋季本科时间序列

第 6 次作业

提交日期：11 月 16 日

1. 给定随机向量 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\intercal$ 及其协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_X)^\intercal$，回答如下问题。

   (a) 请证明 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对称矩阵。

   (b) 对任意 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$，定义 $Z \equiv \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{X}$ 并计算其方差，从而证明 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个半正定矩阵，即 $\boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w} \geq 0$。

   (c) 若存在 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $Z \equiv \boldsymbol{w}^\intercal \boldsymbol{X}$ 的方差为 0，则称 $X_1, \ldots, X_n$ 线性相关（非独立）。请证明，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵当且仅当 $\boldsymbol{X}$ 各分量线性独立。

2. 考虑一般的线性回归模型

$$\boldsymbol{Y}_{T\times 1} = \boldsymbol{X}_{T\times K} \boldsymbol{\beta}_{K\times 1} + \boldsymbol{e}_{T\times 1},$$

   其中 K 个解释变量 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{Z}_{T\times N}, \boldsymbol{W}_{T\times M}]$ 可以分为两组 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$，满足 $N + M = K$；同时 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\delta}^\intercal, \boldsymbol{\theta}^\intercal]^\intercal$ 也可以分为对应的两组。故回归模型可以等价的表示为：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}. \tag{1}$$

   (a) 定义矩阵 $\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal$。请验证 $\boldsymbol{P_X}$ 满足如下两条性质：

      i. 对于任意一个 $\boldsymbol{X}$ 的列向量线性组合构成的向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$。

      ii. 对 $\mathbb{R}^T$ 中任意向量 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta}$ 与 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$ 相互垂直，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，即前者转置与后者乘积为 0。

   这样的矩阵 $\boldsymbol{P_X}$ 称为关于 $\boldsymbol{X}$ （列线性空间）的投影矩阵。

   (b) 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left[\hat{\boldsymbol{\delta}}^\intercal, \hat{\boldsymbol{\theta}}^\intercal\right]^\intercal$ 为回归模型 (1) 系数的 OLS 估计，$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$。与 (a) 类似地定义 $\boldsymbol{P_W}$。令

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Z}.$$

   请证明下述结论：

      i. $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 分别为 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的残差向量；

      ii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}$，即 $\boldsymbol{Z}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 与 $\boldsymbol{W}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 均为 $\boldsymbol{0}$ 向量；

      iii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的投影为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{P_W}\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{0}$；

      iv. 考虑 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 为残差项，请说明这个回归的 OLS 估计系数正好等于 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$。提示：在 (1) 的 OLS 估计式 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{e}}$ 两边同乘 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W}$，进而验证 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$ 回归系数 OLS 估计的条件。

   至此，你已经证明了著名的 Frisch-Waugh-Lovell 定理。

3. 沿用上题设置，回答下列问题。

(a) 请证明 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 回归的拟合值 $\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{P_X Y}$；类似的，请说明 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 回归的拟合值 $\bar{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{P_Z Y}$。

(b) 利用上题结论，请证明 $\hat{\boldsymbol{Y}} - \bar{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 垂直，从而与 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 垂直。注释：这一性质的几何直观就是著名的三垂线定理，你可以画一个草图，$\boldsymbol{Y}$ 为平面外一个向量，$\boldsymbol{Z}$ 为平面上一个向量且与 $\boldsymbol{Y}$ 起点相同，此时仔细观察 $\boldsymbol{Y}$ 向平面的投影即 $\boldsymbol{P_X Y}$，以及向 $\boldsymbol{Z}$ 所在直线的投影 $\boldsymbol{P_Z Y}$，则易看出两条投影线段和两者的差，构成直角三角形，即 $\hat{\boldsymbol{Y}} - \bar{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{Y}}$ 垂直。

(c) 利用上问，证明 $\hat{\boldsymbol{Y}}^\intercal \hat{\boldsymbol{Y}} \geq \bar{\boldsymbol{Y}}^\intercal \bar{\boldsymbol{Y}}$，并且该不等号严格成立的充分必要条件为 $\hat{\boldsymbol{Y}} - \bar{\boldsymbol{Y}} \neq \boldsymbol{0}$。

(d) 利用上问，证明：在 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]$ 回归中增加解释变量 X_{n+1} 时，R^2 单调递增。