2021 秋季本科时间序列

第 4 次作业

提交日期：11 月 2 日

1. 请证明第 7 讲课件 p.12 的不等式 $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^{\intercal}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \geq 0$。

2. 假设 $\boldsymbol{X}_i = [x_{i1}, \ldots, x_{iT}]^{\intercal}, i = 1, \ldots, K$ 为 $T \times 1$ 列向量，$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \ldots, \beta_K]^{\intercal}$ 为 $K \times 1$ 列向量，$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_K]$ 为 $T \times K$ 矩阵。请利用矩阵乘法的定义，证明 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \beta_1\boldsymbol{X}_1 + \cdots + \beta_K\boldsymbol{X}_K$。

3. 考虑第 6 讲课件 p.18 AR(2) 例子，说明当 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ 平稳时，

$$\det\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2 - 1 & 0 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \\ 1 & -\phi_1 & -\phi_2\end{bmatrix} \neq 0.$$

   提示：注意使用 AR(2) 过程特征多项式 $A(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ 零点分布的性质，以及零点和与积同系数 $\{\phi_i\}$ 的关系。

4. 考虑具体的 AR(2) 过程 $X_t = 1 + 1.3X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + \varepsilon_t$，$\sigma_\varepsilon^2 = 1$。

   (a) 请计算 $\mathbb{E}X_t$，方差 γ_0，1-阶自协方差 γ_1，以及自协方差 γ_k 的通项公式。提示：计算（自）协方差时，可以先定义 $Y_t = X_t - \mathbb{E}X_t$，从而简化计算过程；同时，请使用 Cramer 法则求系数矩阵的逆。

   (b) 利用 R 或 Python，随机模拟 ε_t 1002 次（分布任取），并从 $X_{-2} = X_{-1} = 0$ 开始，利用循环递推模拟 $X_t, t = 1, \ldots, 1000$。对 $i = 1, \ldots, 10$，使用不同长度样本 $\{X_t\}_{t=1}^{100i}$，依次计算前 20 阶自协方差 $\hat{\gamma}_k^{(i)}, k = 0, \ldots, 20$ 样本矩。最后，以 k 为横坐标，绘制 10 组模拟样本矩 $\hat{\gamma}_k^{(i)}$ 序列，并绘制上问计算的理论矩序列 γ_k，比较不同样本长度下，样本矩与理论矩之间的差异及变化趋势。