国际金融试验班 2021 年秋 • 时间序列

# 第 15 讲：状态空间模型

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 12 月 21 日

# 本讲内容

1. 状态空间模型
2. 复习

# 本节内容

# 状态空间模型

- 前面课程中介绍的平稳时间序列，其动态特征都通过动态方程直接进行刻画
  - ARMA/VAR/ARCH/GARCH
  - 其核心都可以归结为（低阶）AR 动态方程 + （低阶）MA 动态方程
- 在基础的时间序列动态方程之上，可以考虑复合的时间序列过程：状态变量满足一个动态方程，观测变量又是状态变量的一个函数，以及可能的额外误差项（噪音），即状态-空间表示 (state-space representation)

## 状态空间模型的例子

- 考虑 $Y_t = X_t + w_t$，其中 $\{w_t\}$ 为白噪声过程；而 $X_t$ 为 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程，且与 $w_t$ 无关
  - 上述动态系统可以写为两（组）方程的状态空间表示：

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \\
Y_t &= X_t + w_t
\end{aligned}
$$

    其中第一个方程为状态动态 (state dynamics) 方程，第二个方程为空间观测 (space observation) 方程
  - 进一步变化可以发现 $Y_t$ 为 ARMA(1,1) 过程：

$$
Y_t = \phi Y_{t-1} + \underbrace{w_t - \phi w_{t-1} + \varepsilon_t}_{\text{可验证这是一个 MA(1) 过程}}
$$

## 状态空间模型的常见形式

- 状态空间模型的常见形式：状态变量 $\boldsymbol{X}_t$ 为 $r \times 1$ 向量，观测变量 $\boldsymbol{Y}_t$ 为 $n \times 1$ 向量，外生变量 $\boldsymbol{Z}_t$ 为 $k \times 1$ 向量，满足如下（线性）动态方程系统

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$$
$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{H}^\top\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{Z}_t + \boldsymbol{w}_t$$

- 其中 $\boldsymbol{v}_t$ 为状态方程零均值白噪声冲击（向量），满足 $\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{v}_t^\top = \boldsymbol{Q}$，$\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{v}_{t-j}^\top = \boldsymbol{0}\,\forall j \neq 0$；$\boldsymbol{w}_t$ 为观测方程零均值白噪声冲击（向量），满足 $\mathbb{E}\boldsymbol{w}_t\boldsymbol{w}_t^\top = \boldsymbol{R}$，$\mathbb{E}\boldsymbol{w}_t\boldsymbol{w}_{t-j}^\top = \boldsymbol{0}\,\forall j \neq 0$；且两组白噪声无关 $\mathbb{E}\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{w}_{t-j}^\top = \boldsymbol{0}\,\forall j$
- $\boldsymbol{F}$ 为状态动态方程系数矩阵，该方程说明 $\boldsymbol{X}_t$ 是一个 VAR 过程；$\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}$ 为观测方程系数矩阵，写转置形式是与多元回归方程写法保持一致

## 状态空间模型的等价形式与变量关系

- 将外生变量 $\boldsymbol{Z}_t$ 在观测方程中单独写出，通常是为了突出观测变量 $\boldsymbol{Y}_t$ 不仅受内生状态变量 $\boldsymbol{X}_t$ 影响
  - 特例：观测方程中的常数项，$\boldsymbol{Z}_t = [1, \ldots, 1]^\mathsf{T}$
- 但实际上可以将 $\boldsymbol{Z}_t$ 与 $\boldsymbol{X}_t$ 合并，定义 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_t = [\boldsymbol{X}_t^\mathsf{T}, \boldsymbol{Z}_t^\mathsf{T}]^\mathsf{T}$，并将各系数矩阵、白噪声向量用零矩阵（分块）做相应拓展，可以得到如下等价的状态空间表示：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{X}}_t &= \widetilde{\boldsymbol{F}}\widetilde{\boldsymbol{X}}_{t-1} + \widetilde{\boldsymbol{v}}_t \\
\boldsymbol{Y}_t &= \widetilde{\boldsymbol{H}}^\mathsf{T}\widetilde{\boldsymbol{X}}_t + \boldsymbol{w}_t
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{Z}_t$ 的外生性体现在 $\mathbb{E}\boldsymbol{Z}_t\boldsymbol{v}_t^\mathsf{T} = \mathbb{E}\boldsymbol{Z}_t\boldsymbol{w}_t^\mathsf{T} = \boldsymbol{0}$

## ARMA 过程的状态空间模型估计

- ARMA$(p,q)$ 过程的估计，由于 MA$(q)$ 部分的存在，常规方法不易处理
  - 可以用 OLS 辅助回归的方法，但必然带来有限样本偏误
  - 常规似然函数高度非线性，数值求解稳健性较低
- 状态空间表示提供了一个更便利的极大似然估计路径
  - 需要使用 Kalman 滤波对似然函数进行递归计算
  - 该方法对一般的状态空间模型均适用

## ARMA 过程的状态空间表示：直接方法——兜圈子

- 考虑 ARMA$(p,q)$ 过程

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 定义 $\boldsymbol{X}_t = [Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-p}, \varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_{t-q}]^\top$，则可对应定义 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v}_t$，使得 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{v}_t$
- 相应的

$$\boldsymbol{H} = [\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_0, \ldots, \theta_q]$$

  则 $Y_t = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_t$
- 上述状态空间表示不简洁：$\boldsymbol{F}$ 中同样包含 $\{\phi_i\}, \{\theta_j\}$，实质是同义反复

## ARMA 过程的状态空间表示：紧凑方法

- 令 $r = \max(p, q+1)$，并补充定义 $\phi_i = 0$ 若 $p < i \le r$ 或 $\theta_j = 0$ 若 $q < j \le r$，此时 $Y_t$ 可写为

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_r Y_{t-r} + \theta_0 \varepsilon_t + \cdots + \theta_{r-1} \varepsilon_{t-r+1}$$

- 定义 $\boldsymbol{X}_t$ 满足如下状态方程

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{r-1} & \phi_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

并定义观测方程 $Y_t = [\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}] \boldsymbol{X}_t$，则可验证 $Y_t$ 同时满足前述 ARMA$(p, q)$ 方程

# 本节内容

# 考试形式

- 闭卷，1 月 6 日下午 2:30–4:30，教 5–105
- 题目类型：与作业保持一致，无编程题
- 题目数量：10 个小题左右
- 题目难度：平均低于作业水平
- 是否需要计算器：基本不需要，至多有简单的小数运算

# 考试范围

- 本学期课程覆盖范围
- 需要掌握课程中反复使用的推理、计算方法
  - 课上讲过的的线性代数、微积分、概率论概念、原理与方法自然也是考察范围内
- 以课件、课堂讲授、作业为准，不需要考虑其他时间序列参考书中内容

## 课程回顾：概率论与统计基础

- 1-元及多元随机变量及分布
- 独立性，条件概率
- 大数定律，中心极限定理
- 数据生成过程与统计模型
- 模型参数估计与推断
  - 矩估计，似然估计
  - 统计检验，原假设、备择假设，统计量及其分布，临界值与显著性水平，$p$-值

## 课程回顾：平稳时间序列的性质

- 时间序列平稳性的概念
- 线性时间序列
  - 白噪音过程，系数绝对值收敛
- 谱密度，滤波与增益函数，周期性与趋势
- ARMA 模型
  - 有限阶 AR 过程的平稳性，有限阶 MA 过程的可逆性
  - 自回归过程的 Yule-Walker 方程
- 滞后算子 $\mathscr{L}$，算子多项式，特征多项式
- 平稳时间序列的 MA 展开

## 课程回顾：回归分析

- 多元回归模型的 OLS 估计
  - 回归模型的几何解释
- OLS 估计的大样本性质
  - 回归系数的一致性及渐近分布
  - OLS 估计的基础假设
- OLS 估计系数的标准误，单系数检验与 $t$-统计量，多系数联合检验与 Wald 统计量
  - 普通标准误与稳健标准误

# 课程回顾：平稳时间序列的统计分析

- AR 过程的分析
  - 鞅差序列及对应的中心极限定理
  - 自回归过程的 OLS 估计
  - 自回归过程的极大似然估计
- MA 过程的分析
  - 矩估计，极大似然估计
  - 可逆过程的近似估计，白噪声的辅助 AR 回归估计

# 课程回顾：平稳时间序列的拓展分析

- 动态回归模型
  - 内生性问题
- 时间序列的预测
  - 最优预测，最优线性预测
  - $s$-步预测及误差
- VAR 模型
  - VAR 模型的平稳性，$p$-阶形式与 1-阶形式转换，MA($\infty$) 展开
  - VAR 模型的 OLS 估计
  - 冲击项协方差矩阵 Cholesky 分解，脉冲响应函数，方差分解，Granger 检验

## 课程回顾：随机波动率与随机趋势

- 随机波动率
  - 条件波动率：概念与随机性
  - ARCH 模型：简单性质，平方项 AR 结构
  - GARCH 模型：与 ARCH 的区别，平方项 ARMA 结构
- 随机趋势
  - 确定性趋势与单位根过程随机趋势
  - DF 与 ADF 检验：单位根原假设下，传统 OLS 大样本性质失效，引入 Brown 运动构造估计量极限分布
  - 多元单位根过程长期平稳（均衡）关联：协整关系及一阶差分项表示为向量误差修正模型

# 课程评价

请大家填写学校课程评教问卷！

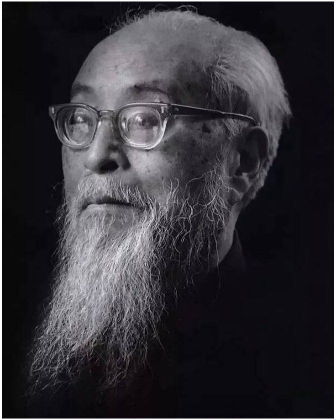
# 武大人的初心与使命

## 地不平，天平——樱顶校训

为天地立心，
为生民立命，
为往圣继绝学，
为万世开太平。

高山仰止，
景行行止，
虽不能至，
心向往之。

《中国现代哲学史》结语



冯友兰：1895–1990