国际金融试验班 2021 年秋 • 时间序列

第 11 讲：向量自回归模型

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 11 月 23 日

本讲内容

本节内容

VAR 模型基本形式

- 向量自回归 (vector autoregression, VAR) 模型：$K \times 1$ 随机向量 $\boldsymbol{X}_t$ 具有“自回归”结构
- VAR(p) 过程：$\boldsymbol{X}_t$ 满足下列 p-阶自回归方程

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  其中 $p \geq 1$，$\boldsymbol{c}$ 为 $K \times 1$ 常数向量，$\boldsymbol{\Phi}_i$ 为 $K \times K$ 常数矩阵，$i = 1, \ldots, p$
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声，协方差矩阵为 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\Omega}$，自协方差矩阵 $\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{0}_{K \times K}$，$\forall i \geq 1$
- 上述 VAR 模型又称为约化形式 (reduced form)，不包括对 $\boldsymbol{X}_t$ 变量间关系的额外限制

VAR 示例

- VAR 在经济学中的流行，始于 Christopher Sims (1980) “Macroeconomics and Reality” *Econometrica*
  - 首次用 VAR 模型来讨论关键宏观经济变量的波动与交互依赖特征，放弃了传统大型计量模型范式
  - 6 个变量，货币总量，产出，失业率，价格水平，工资水平，进口价格指数
- Stock and Watson (2001, *J. Econ. Perspective*) 3 变量 VAR：

$$\boldsymbol{X}_t = [u_t, \pi_t, i_t]^\mathsf{T}$$

u_t 为失业率，π_t 为通胀率，i_t 为基准利率 (Federal funds rate)，均为季度频率

- 模型滞后阶数为 4，VAR(4)：

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_4 \boldsymbol{X}_{t-4} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

VAR 示例

- 以 Stock and Watson 3 变量 VAR 中的基准利率方程为例

$$
\begin{aligned}
i_t = c^i &+ \phi_1^u u_{t-1} + \phi_1^\pi \pi_{t-1} + \phi_1^i i_{t-1} \\
&+ \phi_2^u u_{t-2} + \phi_2^\pi \pi_{t-2} + \phi_2^i i_{t-2} \\
&\cdots \\
&+ \phi_4^u u_{t-4} + \phi_4^\pi \pi_{t-4} + \phi_4^i i_{t-4} + \varepsilon_t^i
\end{aligned}
$$

- 上式可以看做 Taylor 规则的一般化

本节内容

VAR 的平稳性

- 与单变量 AR 模型类似，VAR 模型也有（协方差）平稳性问题
- 给定 VAR 方程，满足该（差分）方程的 VAR 过程 $\mathbf{X}_t$，未必是一个平稳过程
  - 考虑 2-元 VAR(1) 模型，滞后项矩阵为

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 与单变量 AR 模型的特征多项式类似，VAR 模型也可以定义特征多项“式”——不过是矩阵取值

VAR(1) 的例子

- 考虑 K-元 VAR(1) 模型：$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$
- 类似 AR(1) 做递推展开，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{J-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-J+1} + \boldsymbol{\Phi}^J\boldsymbol{X}_{t-J} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1}\boldsymbol{\Phi}^j\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} + \boldsymbol{\Phi}^J\boldsymbol{X}_{t-J}\end{aligned}$$

- AR(1) 的 MA 展开中，平稳性需要 ε_{t-j} 前系数具有绝对可和性质，这同时保证了 X_{t-J} 项收敛到 $0 \Leftarrow |\phi| < 1$
- 对应到 VAR(1) 中，$\boldsymbol{\Phi}$ 需要满足什么性质？

VAR(1) 的例子

- 假设 $\mathbf{\Phi}$ 具有 K 个互不相等的特征值 λ_k, $k = 1, \ldots, K$，则 $\mathbf{\Phi}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$，其中 $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$
- 定义 $\boldsymbol{Y}_t = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}_t$, $\boldsymbol{\zeta}_t = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$，则当 $|\lambda_k| < 1\ \forall k$ 时，

$$\boldsymbol{Y}_t = \sum_{j=0}^{J-1} \mathbf{\Lambda}^j \boldsymbol{\zeta}_{t-j} + \mathbf{\Lambda}^J \boldsymbol{Y}_{t-J} \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^j \boldsymbol{\zeta}_{t-j}, \quad J \to \infty$$

  为平稳（向量）序列
- 此时有 $\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^j\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$
- 若 $\mathbf{\Phi}$ 不可对角化，但 $|\lambda_k| < 1\ \forall k$，可以用 Jordan 分解证明其平稳性

VAR(p) 的平稳性

- 考虑开始的 VAR(p) 模型，并使用滞后算子将模型改写为

$$\boldsymbol{A}(\mathscr{L})\boldsymbol{X}_t \equiv (\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1\mathscr{L} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p\mathscr{L}^p)\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  其中 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 表示算子多项式矩阵，即矩阵中每一个元素都是 $\mathscr{L}$ 的一个多项式；$\boldsymbol{I}_K$ 表示 $K \times K$ 的单位阵
- 是否可以找到一个对应的（无穷阶）算子多项式矩阵 $\boldsymbol{B}(\mathscr{L})$，使得 $\boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{A}(\mathscr{L}) = \boldsymbol{I}_K$？
- 如若此，则有 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{c} + \boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t$；进一步，如何保证平稳性？

算子多项式矩阵的逆

- 算子多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L}) = [A_{ij}(\mathscr{L})]_{1\le i,j\le K}$
- 为求 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 的逆，将 $\mathscr{L}$ 看做一个普通变元，或直接将 $\mathscr{L}$ 替换为复变元 $z \in \mathbb{C}$，则 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 或 $\boldsymbol{A}(z)$ 就是一个普通矩阵求逆的问题
- Cramer 法则：

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L}) = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]}\boldsymbol{A}^{*}(\mathscr{L}), \qquad \boldsymbol{A}^{-1}(z) = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(z)]}\boldsymbol{A}^{*}(z)$$

  其中 $\boldsymbol{A}^{*}(\cdot)$ 为 $\boldsymbol{A}(\cdot)$ 的伴随矩阵

- 注意，$\boldsymbol{A}^{*}(\cdot)$ 中每个元素，只是 $\mathscr{L}$ 或 z 的 $p(K-1)$-阶多项式；而 $\det[\boldsymbol{A}(\cdot)]$ 则是 $\mathscr{L}$ 或 z 的 pK-阶多项式

伴随矩阵的形式

- 与普通数量矩阵（各元素为一个数）类似，多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(z)$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*(z)$ 第 i 行、第 j 列元素 $A^*_{ij}(z)$，为矩阵 $\boldsymbol{A}(z)$ 关于第 j 行、第 i 列元素 $A_{ji}(z)$ 的代数余子式
    - 该代数余子式为 $\boldsymbol{A}(z)$ 删去第 j 行与第 i 列（即 $A_{ji}(z)$ 所在行列）剩下的 $(K-1)\times(K-1)$ 阶矩阵行列式乘以 $(-1)^{i+j}$
- 具体而言，有如下表达式

$$
A^*_{ij}(z) = (-1)^{i+j}\det\begin{bmatrix}
A_{11}(z) & \cdots & A_{1i-1}(z) & A_{1i+1}(z) & \cdots & A_{1K}(z) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{j-1,1}(z) & \cdots & A_{j-1,i-1}(z) & A_{j-1,i+1}(z) & \cdots & A_{j-1,K}(z) \\
A_{j+1,1}(z) & \cdots & A_{j+1,i-1}(z) & A_{j+1,i+1}(z) & \cdots & A_{j+1,K}(z) \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A_{K1}(z) & \cdots & A_{Ki-1}(z) & A_{Ki+1}(z) & \cdots & A_{KK}(z)
\end{bmatrix}
$$

平稳性的条件

- 平稳性的重点：$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的平稳性

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]} \underbrace{\boldsymbol{A}^*(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t}_{\mathrm{MA}(p(K-1))}$$

分母 $\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]$ 为算子 pK-阶多项式

- 令 $\det[\boldsymbol{A}(z)]$ 的 pK 个零点为 $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, pK$，则

$$\det[\boldsymbol{A}(z)] = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_{pK}}\right)$$

对应的算子多项式分解为

$$\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})] = \left(1 - \frac{\mathscr{L}}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mathscr{L}}{z_{pK}}\right)$$

平稳性的条件

- 显然，$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 平稳的条件，为 $|z_i| > 1\ \forall i$
  - 即充分，且必要
- 由 $\det[\boldsymbol{A}(z)] = \det[\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p]$，令 $z = 1/\lambda$，则

$$
\begin{aligned}
\det[\boldsymbol{A}(z)] &= \det[\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 \lambda^{-1} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p \lambda^{-p}] \\
&= \det[\lambda^{-p}(\boldsymbol{I}_K \lambda^p - \boldsymbol{\Phi}_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p)] \\
&= \lambda^{-pK} \det[\boldsymbol{I}_K \lambda^p - \boldsymbol{\Phi}_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p]
\end{aligned}
$$

  平稳性的条件意味着 $|\lambda_i| = 1/|z_i| < 1$

- 当 $p = 1$ 时，$\det[\boldsymbol{A}(z)] = 0 \Leftrightarrow \det[\boldsymbol{I}_K \lambda - \boldsymbol{\Phi}_1] = 0$，平稳性等价于 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征值（模长）小于 1

VAR 的矩

- VAR 满足平稳性条件时，$\det[\boldsymbol{A}(z)] = \det[\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p]$ 在 $\mathbb{C}$ 中单位圆内不等于 0，特别的 $\det[\boldsymbol{A}(1)] \neq 0$
- 此时 $\boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p$ 为可逆矩阵，故

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}^{-1}(1)\boldsymbol{c}$$

- 当 $p \geq 2$ 时，计算协方差矩阵 $\text{var}(\boldsymbol{X}_t) = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu})^\mathsf{T}$ 需要进一步的线性代数技巧
- 当 $p = 1$ 时，$\text{var}(\boldsymbol{X}_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}j}$
  - 不过，所有 $p \geq 2$ 阶 VAR 都可以改写为 1 阶 VAR

VAR(p) ⇒ VAR(1)

- K 维向量的 p-阶 VAR

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

可以改写为 pK 维的 1-阶 VAR

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t$$

- 其中

$$\boldsymbol{Y}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_t \\ \boldsymbol{X}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_{t-p} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_p \\ \boldsymbol{I}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0}_K & \cdots & \boldsymbol{I}_K & \boldsymbol{0}_K \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

VAR(p) ⇒ VAR(1)：平稳性

- VAR(1) 过程 $\boldsymbol{Y}_t$ 的矩阵值算子特征多项式为

$$\boldsymbol{A}(\mathscr{L}) = \boldsymbol{I}_{pK} - \boldsymbol{\Psi}\mathscr{L}$$

- $\boldsymbol{Y}_t$ 的平稳性条件为 pK 阶多项式 $\det[\boldsymbol{A}(z)] = \det[\boldsymbol{I}_{pK} - \boldsymbol{\Psi}z]$ 零点全部位于 $\mathbb{C}$ 中单位圆之外
- 令 $\lambda = 1/z \Leftrightarrow z = 1/\lambda$，上述条件为 $\lambda^{pK}\det[\lambda\boldsymbol{I}_{pk} - \boldsymbol{\Psi}]$ 所有零点在单位圆中，即 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值模长均小于 1

$\boldsymbol{\Psi}$ 的特征多项式

$$
\begin{aligned}
&\det[\lambda \boldsymbol{I}_{pk} - \boldsymbol{\Psi}] \\
=\ &\det\begin{bmatrix}
\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 & -\boldsymbol{\Phi}_2 & \cdots & -\boldsymbol{\Phi}_{p-1} & -\boldsymbol{\Phi}_p \\
-\boldsymbol{I}_K & \lambda \boldsymbol{I}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K & \cdots & -\boldsymbol{I}_K & \lambda \boldsymbol{I}_K
\end{bmatrix} \\
=\ &\det\begin{bmatrix}
\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 & -\boldsymbol{\Phi}_2 & \cdots & -\boldsymbol{\Phi}_{p-1} - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Phi}_p & -\boldsymbol{\Phi}_p \\
-\boldsymbol{I}_K & \lambda \boldsymbol{I}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \lambda \boldsymbol{I}_K
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\Psi}$ 的特征多项式

$$
\begin{aligned}
&\det[\lambda \boldsymbol{I}_{pk} - \boldsymbol{\Psi}] \\
= &\det \begin{bmatrix}
\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 & -\boldsymbol{\Phi}_2 - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Phi}_3 \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-2}}\boldsymbol{\Phi}_p & \cdots & -\boldsymbol{\Phi}_{p-1} - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Phi}_p & -\boldsymbol{\Phi}_p \\
-\boldsymbol{I}_K & \lambda \boldsymbol{I}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K & \cdots & \color{red}{\boldsymbol{0}_K} & \lambda \boldsymbol{I}_K
\end{bmatrix} \\
= &\det \begin{bmatrix}
\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-1}}\boldsymbol{\Phi}_p & \cdots & \cdots & -\boldsymbol{\Phi}_{p-1} - \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\Phi}_p & -\boldsymbol{\Phi}_p \\
\color{red}{\boldsymbol{0}_K} & \lambda \boldsymbol{I}_K & \cdots & \boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\boldsymbol{0}_K & \boldsymbol{0}_K & \cdots & \color{red}{\boldsymbol{0}_K} & \lambda \boldsymbol{I}_K
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\Psi}$ 的特征多项式

$$
\begin{aligned}
&\det[\lambda \boldsymbol{I}_{pk} - \boldsymbol{\Psi}] \\
= \; &\det\left[\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-1}}\boldsymbol{\Phi}_p\right] \cdot \det[\lambda \boldsymbol{I}_K] \cdots \det[\lambda \boldsymbol{I}_K] \\
= \; &\det\left[\lambda \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \frac{1}{\lambda^{p-1}}\boldsymbol{\Phi}_p\right] \lambda^{(p-1)K} \\
= \; &\det\left[\frac{1}{\lambda^{p-1}}\left(\lambda^p \boldsymbol{I}_K - \lambda^{p-1}\boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p\right)\right] \lambda^{(p-1)K} \\
= \; &\det[\lambda^p \boldsymbol{I}_K - \lambda^{p-1}\boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p] \lambda^{-(p-1)K} \lambda^{(p-1)K} \\
= \; &\det[\lambda^p \boldsymbol{I}_K - \lambda^{p-1}\boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p]
\end{aligned}
$$

与 VAR(p) 形式的平稳性条件完全一致