国际金融试验班 2021 年秋 · 时间序列

第 10 讲：时间序列的预测

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2021 年 11 月 16 日

本讲内容

本节内容

条件概率和条件期望

- 给定随机变量 X, Y 以及其联合密度函数 $f(x, y)$
- 给定 $X = x$，Y 的条件概率密度可表示为

$$f(y|x) = \underbrace{\frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(X = x)}}_{\text{不严格类比}} = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y)\mathrm{d}y}$$

- $\mathbb{E}(Y|X = x) = \int y f(y|x)\mathrm{d}y$ 称为 Y 在 X 上的条件期望
- 记为 $\mathbb{E}(Y|X)$；可看做 X 的函数

条件期望的性质

- 全期望律 (law of total expectation)：$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)]$
- 若 X, Y 相互独立，则 $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}Y$
- 给定函数 $g(\cdot)$，$\mathbb{E}[g(X)Y|X] = g(X)\mathbb{E}(Y|X)$
- $\mathbb{E}(Y|X)$ 是 X 对 Y 的最小均方预测函数：$\mathbb{E}(Y|X)$ 是最小化问题

$$\min_{g(\cdot)} \mathbb{E}[Y - g(X)]^2$$

的（唯一）解 $\Rightarrow$ 均方误差意义下，Y 的最优预测为 $\mathbb{E}(Y|X)$

- 若 $Z = g(X)$ 且 $g(\cdot)$ 是严格单调函数，则

$$\mathbb{E}(Y|Z) = \mathbb{E}[Y|g(X)] = \mathbb{E}(Y|X)$$

最优预测推导

- 对于任意的函数 $f(\cdot)$，$f(X)$ 对 Y 的均方预测误差可写为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y - f(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X) + \mathbb{E}(Y|X) - f(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)]^2 + 2\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))(\mathbb{E}(Y|X) - f(X))] \\
&\quad + \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) - f(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)]^2 + 2\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))(\mathbb{E}(Y|X) - f(X))|X]}_{=(\mathbb{E}(Y|X)-f(X))\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}(Y|X))|X]=0}] \\
&\quad + \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) - f(X)]^2 \\
&= \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)]^2 + \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X) - f(X)]^2
\end{aligned}
$$

- 故对任意 $f(\cdot)$，$\mathbb{E}[Y - f(X)]^2 \geq \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)]^2$

联合正态下的条件期望

- 给定 X, Y 服从二元正态分布
- 定义 $Z = (Y - \mathbb{E}Y) - \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}(X - \mathbb{E}X)$；则有 Z 为正态分布，且 $\mathbb{E}Z = 0$
- 可验证 $\operatorname{cov}(Z, X) = \mathbb{E}ZX = 0$，故 Z, X 互相独立；进一步的，$Z, g(X)$ 相互独立，故 $\mathbb{E}Zg(X) = \mathbb{E}Z\mathbb{E}g(X) = 0$
- 由此可证明 $Y - Z = \mathbb{E}Y + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}(X - \mathbb{E}X)$ 是 X 对 Y 的最小均方预测，故

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}Y + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)}(X - \mathbb{E}X), \quad \text{进一步有}$$

$$\operatorname{var}(Y|X) = \operatorname{var}(Y) - \frac{[\operatorname{cov}(X,Y)]^2}{\operatorname{var}(X)}, \quad \text{是一个常数}$$

本节内容

线性预测

- 给定随机变量 Y 及 K-维随机向量 $\boldsymbol{X}$（可包含常数项），定义 $\boldsymbol{X}$ 对 Y 的线性预测 (linear prediction) 为 $\hat{Y} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^K$，对应的 $Y - \hat{Y}$ 称为预测误差 (prediction error)
- 定义最优均方 (optimal mean square) 线性预测为使 $\mathbb{E}[Y - \hat{Y}]^2$ 最小的线性预测 $\hat{\boldsymbol{b}}^\top \boldsymbol{X}$：

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{b}} \mathbb{E}[Y - \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{X}]^2$$

- 类似于 OLS，上述 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 的取值需满足 $\mathbb{E}[(Y - \hat{\boldsymbol{b}}^\top \boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^\top] = \boldsymbol{0}^\top$，故 $\hat{\boldsymbol{b}} = (\mathbb{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top])^{-1}\mathbb{E}[\boldsymbol{X}Y]$
- 最优线性预测记为 $L(Y|\boldsymbol{X})$，可直观理解为 Y 对 $\boldsymbol{X}$ 的投影

正态条件下的线性预测与最优预测

- 给定 Y, X 为 2-元正态分布 r.v.，期望为 0
- X 对 Y 的最优线性预测系数 $\hat{b}$ 满足

$$\hat{b} = \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}X^2} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\operatorname{var}(X)}$$

  最优线性预测 $L(Y|X) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\operatorname{var}(X)} X$

- 此时 X 对 Y 的最优（均方）预测与最优（均方）线性预测相等

$$\mathbb{E}[Y|X] = L(Y|X)$$

本节内容

时间序列的预测

- 给定时间序列 $\{Y_t\}$，可以考虑用 t 及之前的观测值，对 Y_{t+s} 进行线性预测

$$\hat{Y}_{t+s|t} = L(Y_{t+s}|Y_t, Y_{t-1}, \ldots), \quad s \geq 1$$

- 更一般的，给定时间序列 $\{Y_t\}$ 与 $\{\boldsymbol{X}_t\}$，其中 $\boldsymbol{X}_t \in \mathbb{R}^K$，可以考虑用 t 及之前的观测值 $\{\boldsymbol{X}_{t-j}\}_{j\geq 0}$ 对 Y_{t+s} 进行线性预测

$$\hat{Y}_{t+s|t} = L(Y_{t+s}|\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{X}_{t-1}, \ldots), \quad s \geq 1$$

- 最优线性预测的具体形式，即系数向量 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 的确定，依赖于具体模型

AR(1) 的预测

- 给定平稳 AR(1) 过程 $X_{t+1} = \mu + \phi X_t + \varepsilon_{t+1}$，$|\phi| < 1$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声
- X_{t+1} 在 t 的最优线性预测 $\hat{X}_{t+1|t} = \mu + \phi X_t$
    - 直接可验证 $\mathbb{E}[(X_{t+1} - \hat{X}_{t+1|t})X_t] = 0$
- X_{t+2} 在 t 的最优线性预测 $\hat{X}_{t+2|t} = \mu + \phi\mu + \phi^2 X_t$
    - 由 AR 迭代可得：$X_{t+2} = \mu + \phi\mu + \phi^2 X_t + \phi\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}$
    - 由此可验证 $\mathbb{E}[(X_{t+2} - \hat{X}_{t+2|t})X_t] = 0$
- 另一角度，$\hat{X}_{t+2|t}$ 可看做 $\hat{X}_{t+2|t+1}$ 在 t 的线性预测
    - $\hat{X}_{t+2|t+1} = \mu + \phi X_{t+1}$
    - $\hat{X}_{t+2|t} = \mu + \phi \hat{X}_{t+1|t} = \mu + \phi\mu + \phi^2 X_t$

AR(1) 预测的渐近性质

- 可验证，$\forall s \geq 1$ 有

$$\hat{X}_{t+s|t} = \mu \sum_{r=0}^{s-1} \phi^r + \phi^s X_t$$

- 由此可知，

$$\lim_{s\to\infty} \hat{X}_{t+s|t} = \frac{\mu}{1-\phi} = \mathbb{E}X_t$$

即 X_{t+s} 的长期（最优）线性预测值收敛到其无条件期望

- 进一步计算可知

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{E}[X_{t+s} - \hat{X}_{t+s|t}]^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = \mathrm{var}(X_t)$$

即 X_{t+s} 的长期均方预测误差收敛到其无条件方差

三点注释

- 对一般的 AR(p) 过程，同样可以利用“递归”预测的方式，计算 $\hat{X}_{t+s|t}$
  - 先计算 $\hat{X}_{t+s|t+s-1}$，再对结果中出现的 X_{t+s-1} 计算 $\hat{X}_{t+s-1|t+s-2}$，以此递推
- 对 AR(p) 过程而言，若 $\{\varepsilon_t\}$ 相互独立，则有

$$\hat{X}_{t+s|t} = L(X_{t+s}|X_t, X_{t-1}, \ldots) = \mathbb{E}[X_{t+s}|X_t, X_{t-1}, \ldots] = \mathbb{E}_t X_{t+s}$$

- MA 过程及 ARMA 过程同样可以进行类似的预测
  - MA 的预测可借助对观测值 X_t 的自回归近似所得到的近似 $\hat{\varepsilon}_t$ 来完成