2020 秋季本科时间序列

第 7 次作业

提交日期：12 月 10 日

1. 假设 $[\boldsymbol{X}^\intercal, \boldsymbol{Y}^\intercal]^\intercal = [X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]^\intercal \sim N\left(\left[\boldsymbol{\mu}_X^\intercal, \boldsymbol{\mu}_Y^\intercal\right]^\intercal, \boldsymbol{\Sigma}\right)$，为多元联合正态分布，且协方差矩阵有如下分块结构
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{XX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{YY} \end{bmatrix}.$$
   (a) 对任意的 $i = 1, \dots, n$，请模仿第 10 讲课件，证明 $\mathbb{E}[X_i|\boldsymbol{Y}]$ 等于如下随机变量
$$\mathbb{E}X_i + \boldsymbol{\Sigma}_{XY,i}\boldsymbol{\Sigma}_{YY}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y),$$
   其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{XY,i}$ 为矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{XY}$ 的第 i 行，即行向量 $\operatorname{cov}(X_i, \boldsymbol{Y}^\intercal)$。

   (b) 在上问基础上，请说明
$$\mathbb{E}[\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{\mu}_X + \boldsymbol{\Sigma}_{XY}\boldsymbol{\Sigma}_{YY}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y).$$
   (c) 利用上述结论，计算 MA(2) 过程 $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$ 的条件期望：$\forall j \geq 1$，
$$\mathbb{E}_t X_{t+j} \equiv \mathbb{E}[X_{t+j}|X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots].$$

2. 考虑平稳 AR(2) 过程 $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声过程，方差为 σ_ε^2。

   (a) 请计算最优线性预测 $\hat{X}_{t+j|t} = L(X_{t+j}|X_t, X_{t-1}, \dots)$，$j \geq 1$。

   (b) 请证明下列最优线性预测递推表达式：
$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{t+1|t} \\ \hat{X}_{t|t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix},$$
   并证明
$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{t+j|t} \\ \hat{X}_{t+j-1|t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} X_t \\ X_{t-1} \end{bmatrix}.$$
   (c) 利用 (b) 以及 X_t 的平稳性，证明 $\lim_{j\to\infty} \hat{X}_{t+j|t} = 0$。

   (d) 假设 $\phi_1 = 1.7$, $\phi_2 = -0.72$，请计算 $\hat{X}_{t+j|t}$ 的通项表达式，$j \geq 1$。