2020 秋季本科时间序列

第 5 次作业

提交日期：11 月 19 日

1. 假设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}], \boldsymbol{B}=[b_{ij}], \boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ 和 $\boldsymbol{D}=[d_{ij}]$ 分别为 $k\times\ell, k\times m, \ell\times n, m\times n$ 的矩阵。请利用矩阵乘法定义，验证分块矩阵乘法规则：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}_{k\times(\ell+m)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix}_{(\ell+m)\times n}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}.$$

2. 考虑 p-阶平稳自回归过程 $X_t=\phi_0+\sum_{i=1}^{p}\phi_i X_{t-i}+\varepsilon_t$，$\{\varepsilon_t\}$ 为 0 均值白噪声，$\phi_0\in\mathbb{R}$ 为常数。

   (a) 假设 $\phi_0=0$。现有样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$，回归方程的矩阵形式如

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}.$$

   请详细说明 $\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}$ 几乎处处收敛到对应的 Yule-Walker 方程（求逆形式）：

$$\begin{bmatrix}\sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_X^2(1)\\ \vdots\\ \sigma_X^2(p)\end{bmatrix}.$$

   (b) 若 $\phi_0\neq 0$ 且 $p=1$，即自回归方程为 $X_t=\phi_0+\phi_1X_{t-1}+\varepsilon_t$，$|\phi_1|<1$。给定样本 $\{X_t\}_{t=1}^{T}$，请计算此时 $\boldsymbol{\phi}=[\phi_0,\phi_1]^{\intercal}$ 的 OLS 估计 $\hat{\boldsymbol{\phi}}=(\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\intercal}\boldsymbol{Y}$ 的具体表达式，并利用 LLN 确定相应矩阵极限的具体表达式。此时 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的极限还具有 (a) 中 Yule-Walker 方程的形式吗？

   (c) 假设 $\phi_0\neq 0$，请证明此时 p-阶平稳自回归过程的 Yule-Walker 方程依然成立，即

$$\begin{bmatrix}\sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_X^2(1)\\ \vdots\\ \sigma_X^2(p)\end{bmatrix}.$$

   (d) 假设 $\phi_0\neq 0$，请说明此时自回归系数向量 $\boldsymbol{\phi}=[\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_p]^{\intercal}$ 的 OLS 估计值是否仍然等价于 (c) 中的 Yule-Walker 方程（求逆形式）。

3. 考虑一般的线性回归模型

$$\boldsymbol{Y}_{T\times 1}=\boldsymbol{X}_{T\times K}\boldsymbol{\beta}_{K\times 1}+\boldsymbol{e}_{T\times 1},$$

其中 K 个解释变量 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{Z}_{T\times N}, \boldsymbol{W}_{T\times M}]$ 可以分为两组 $\boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{W}$，满足 $N + M = K$；同时 $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\delta}^\intercal, \boldsymbol{\theta}^\intercal]^\intercal$ 也可以分为对应的两组。故回归模型可以等价的表示为：

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e}. \tag{1}$$

(a) 定义矩阵 $\boldsymbol{P_X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^\intercal\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\intercal$。请验证 $\boldsymbol{P_X}$ 满足如下两条性质：

  i. 对于任意一个 $\boldsymbol{X}$ 的列向量线性组合构成的向量 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，$\boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}$。

  ii. 对 $\mathbb{R}^T$ 中任意向量 $\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{P_X}\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_X})\boldsymbol{\zeta}$ 与 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$ 相互垂直，$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^K$，即前者转置与后者乘积为 0。

  这样的矩阵 $\boldsymbol{P_X}$ 称为关于 $\boldsymbol{X}$ （列线性空间）的投影矩阵。

(b) 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\boldsymbol{\delta}}^\intercal, \hat{\boldsymbol{\theta}}^\intercal]^\intercal$ 为回归模型 (1) 系数的 OLS 估计，$\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$。与 (a) 类似地定义 $\boldsymbol{P_W}$。令

$$\tilde{\boldsymbol{Y}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Y}, \qquad \tilde{\boldsymbol{Z}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P_W})\boldsymbol{Z}.$$

  请证明下述结论：

  i. $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 分别为 $\boldsymbol{Y}$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 对 $\boldsymbol{W}$ 回归的残差向量；

  ii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 垂直于 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{W}$，即 $\boldsymbol{Z}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 与 $\boldsymbol{W}^\intercal\hat{\boldsymbol{e}}$ 均为 $\boldsymbol{0}$ 向量；

  iii. $\hat{\boldsymbol{e}}$ 在 $\boldsymbol{W}$ 上的投影为 $\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{P_W}\hat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{0}$；

  iv. 考虑 $\tilde{\boldsymbol{Y}}$ 对 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的回归 $\tilde{\boldsymbol{Y}} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}$ 为残差项，请说明这个回归的 OLS 估计系数正好等于 (1) 中 OLS 估计的结果 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$。

  至此，你已经证明了著名的 Frisch-Waugh-Lovell 定理。