2020 秋季本科时间序列

第 1 次作业

提交日期：10 月 1 日

1. 考虑 2-元离散型随机变量 X, Y，取值范围均为 $\{1,2\}$，且其联合分布 $\mathbb{P}(X=i, Y=j)=p_{ij}$ 为下列矩阵

$$[p_{ij}]_{1\le i,j\le 2}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.2\end{bmatrix}.$$

   (a) 请判断 X, Y 是否相互独立，并写明理由。

   (b) 请计算 $\mathbb{E}XY$ 以及 $\mathrm{cov}(X,Y)$。

2. 考虑两个随机变量 X, Y，联合分布为 $F(x,y)$。

   (a) 请验证期望运算具有线性性，即对任意的 $a, b\in\mathbb{R}$ 有

$$\mathbb{E}[aX+bY]=a\mathbb{E}X+b\mathbb{E}Y.$$

   (b) 对任意 $a\in\mathbb{R}$，计算 $\mathrm{var}(aX+Y)$ 的表达式，并由此证明 $|\mathrm{cov}(X,Y)|^2\le\sigma^2(X)\sigma^2(Y)$ 以及 X, Y 的相关系数 $|\rho(X,Y)|\le 1$，其中 $\sigma^2(\cdot)$ 表示相应随机变量的方差。

3. 给定 $m\times n$ 随机变量矩阵 $\boldsymbol{X}=[X_{ij}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}$。定义

$$\mathbb{E}\boldsymbol{X}=[\mathbb{E}X_{ij}]_{1\le i\le m,1\le j\le n}=\begin{bmatrix}\mathbb{E}X_{11} & \cdots & \mathbb{E}X_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{E}X_{m1} & \cdots & \mathbb{E}X_{mn}\end{bmatrix}.$$

   给定 $k\times m$ 的常数矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{1\le i\le k,1\le j\le m}$，请利用线性代数矩阵乘法定义以及上题期望的线性性，证明

$$\mathbb{E}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\mathbb{E}\boldsymbol{X}.$$

4. 请用 R 或者 Python 编程解答此题。请自行挑选 3 种常见（单变量）分布，包括课件 2 第 15 页离散、连续分布各一种，并自行选取不在课件 2 第 15 页范围内的第 3 种分布（离散、连续均可），记为 $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ 和 $F^{(3)}$。对每一种分布 $F^{(i)}$，计算其总体均值 $\mu^{(i)}$ 和标准差 $\sigma^{(i)}$，并进行 $T=1{,}000{,}000$ 次独立随机抽样，结果记为 $\mathcal{X}^{(i)}=\{X_t^{(i)}\}_{t=1}^{T}$。

   (a) 对 $k=1,\ldots,1{,}000$，每新增 1,000 个样本计算一次累计样本均值

$$\hat{\mu}_k^{(i)}=\frac{1}{1000k}\sum_{t=1}^{1000k}X_t^{(i)},$$

以及累计样本标准差

$$\hat{\sigma}_k^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{1000k-1}\sum_{t=1}^{1000k}\left(X_t^{(i)} - \hat{\mu}_k^{(i)}\right)^2}.$$

画图并说明随着 k 的增加，$\hat{\mu}_k^{(i)}$ 与 $\hat{\sigma}_k^{(i)}$ 逐渐逼近 $\mu^{(i)}$ 与 $\sigma^{(i)}$。

(b) 对 $k = 1, \ldots, 1{,}000$，每 1,000 个样本，计算一个样本均值 $S_k^{(i)}$ 如下

$$S_k^{(i)} = \frac{1}{1000}\sum_{t=1000(k-1)+1}^{1000k} X_t^{(i)}.$$

将 $S_k^{(i)}$ 标准化为 $\xi_k^{(i)}$，绘制其直方图，并与标准正态分布密度曲线相比较，考察 $\xi_k^{(i)}$ 的分布是否接近于标准正态的分布。