第 7 讲：AR 模型的估计

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2019 年 10 月 24 日

本讲内容

本节内容

AR(1) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(1) 过程 $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$，但参数 ϕ, σ_ε 未知
  - 这个 AR(1) 过程就是 $\{X_t\}$ 的 DGP
- 问题：如何估计 ϕ 以及 σ_ε？
- 联想 AR(1) 的 Yule-Walker 方程 $\phi = \sigma_X^2(1)/\sigma_X^2(0)$，可以得到一个 ϕ 的一个估计值

$$\hat{\phi} = \frac{\hat{\sigma}_X^2(1)}{\hat{\sigma}_X^2(0)}$$

其中，$\hat{\sigma}_X^2(1), \hat{\sigma}_X^2(0)$ 分别为 $\{X_t\}$ 的 1-阶样本自协方差与样本方差；后两者的一致性保证了 $\hat{\phi}$ 的一致性

AR(1) 自回归系数的 OLS 估计

- 上面的估计方法利用了 AR(1) 过程的特殊性质
- 更一般的方法，是直接进行线性回归 (linear regression)：

$$X_t = \beta X_{t-1} + e_t$$

  回归系数 β 可以使用一般最小二乘 (ordinary least square, OLS) 进行估计

- OLS 法：最小化残差平方和

$$\min_{\beta} \sum_{t=2}^{T} (X_t - \beta X_{t-1})^2$$

  该最小化问题的解称为 OLS 估计量，记为 $\hat{\beta}$

AR(1) 自回归系数的 OLS 估计

- OLS 估计量的直接推导：最小化问题 1-阶条件

$$\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}(X_t - \beta X_{t-1}) = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_T = \frac{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}X_t}{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2}$$

- 上式中分子分母同时除以 T 可得

$$\hat{\beta}_T = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}X_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} \frac{\sigma_X^2(1)}{\sigma_X^2(0)} = \phi$$

故 X_t 自回归方程系数的 OLS 估计值具有一致性

- 这里的 $\hat{\beta}$ 就是之前介绍的（1-阶）偏自相关系数

OLS 估计的矩阵形式：单一解释变量

- 单一解释变量线性回归的一般写法

$$Y_t = \beta X_t + e_t$$

其向量形式为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \boldsymbol{e}$$

其中 $\boldsymbol{Y} = [Y_1, \ldots, Y_T]^\intercal$ 为被解释变量，$\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_T]^\intercal$ 解释变量，$\boldsymbol{e} = [e_1, \ldots, e_T]^\intercal$ 残差项

- 最小化残差和可表示为

$$\min_\beta \boldsymbol{e}^\intercal \boldsymbol{e} = \min_\beta (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)^\intercal (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\beta)$$

- 单一解释变量不易体现矩阵形式的优越性；多变量则不同

AR(1) 的估计：冲击项方差

- 暂时回归 σ_ε^2 的估计问题
- 利用大数律，自然的想法是利用样本方差 $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2$ 来估计 σ_ε^2；但唯一的观测值为 $\{X_t\}$，而非 $\{\varepsilon_t\}$
- 但是，若有一致估计量 $\hat{\phi}_T$，则大样本下

$$e_t = X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1} \xrightarrow{\text{a.s.}} X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

因此，可利用冲击项 ε_t 的样本估计值 e_t 来估计 σ_ε^2:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} e_t^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}(X_t - \hat{\phi}_T X_{t-1})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} \sigma_\varepsilon^2$$

本节内容

AR(p) 的估计：自回归系数

- 假设数据（观测值）序列 $\{X_t\}_{t=1}^T$ 满足一个 AR(p) 过程 $X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$，但参数 $\phi_1, \ldots, \phi_p, \sigma_\varepsilon$ 未知
- 类似于 AR(1)，如果有 ϕ_i 的一致估计 $\hat{\phi}_i$，则可计算样本冲击 e_t，从而用 $\hat{\sigma}_e^2$（一致）估计 σ_ε^2
- 从 Yule-Walker 方程出发，可以得到

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix}$$

AR(p) 自回归系数的 Yule-Walker 估计

- 给定样本 T 足够大，则样本自协方差是对 X_t 总体自协方差的一致估计
- 在 Yule-Walker 方程中应用样本自协方差，则可以得到 $\phi_1, \ldots, \phi_p$ 的一致估计

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(0) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p-1) & \cdots & \hat{\sigma}_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_X^2(1) \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_X^2(p) \end{bmatrix}$$

AR(p) 自回归系数的 OLS 估计

- AR(p) 的自回归系数也可在线性回归框架下，用 OLS 方法进行估计
- 将 X_t 写为线性回归形式

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_p X_{t-p} + e_t$$

- 则 OLS 估计为最小化残差平方和问题的解

$$\min_{\{\beta_i\}} \sum_{t=p+1}^{T} (X_t - \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_p X_{t-p})^2$$

- 若仍然用微积分求解极值问题的 1-阶最优条件来求解，会比较繁琐

OLS 估计的矩阵形式：多解释变量

- 多解释变量线性回归的一般写法

$$Y_t = \boldsymbol{X}_t^{\intercal}\boldsymbol{\beta} + e_t, \qquad t = 1, \ldots, T$$

其中 $\boldsymbol{X}_t^{\intercal} = [X_{1t}, \ldots, X_{Kt}]$ 为 K 个回归变量

- 其矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$$

其中

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}_{T\times 1}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1^{\intercal} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_T^{\intercal} \end{bmatrix}_{T\times K}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_T \end{bmatrix}_{T\times 1}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}_{K\times 1}$$

OLS 估计的矩阵形式：多解释变量

- OLS 估计量为最小化残差和问题的解

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{e}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e} = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

- **结论：** 若 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 满足 $\mathbf{X}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$（零向量），则 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为上述最小化问题的解；若 $\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X}$ 可逆，则 $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Y}$
  - 只需要说明，$\forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K$，下列不等式成立即可

$$(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \le (\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

  - 为此，只需考虑下式的展开

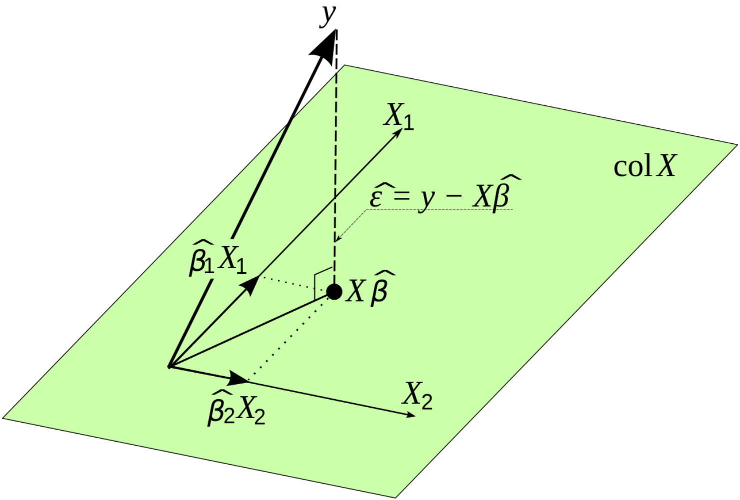
$$(\boldsymbol{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

  及 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 所满足的性质即可

OLS 估计的几何视角

- 将 $\boldsymbol{X}$ 看做 $\mathbb{R}^T$ 中的 K 个列向量，则 $\boldsymbol{X\beta}$ 为这 K 个向量张成的子空间 $\mathcal{X}$ 中的一个向量
- $(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})$ 为 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\boldsymbol{X\beta}$ 的距离
- 最小二乘估计就等价于寻找 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\mathcal{X}$ 距离最短
- 这又等价于使得残差向量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}$ 与子空间 $\mathcal{X}$ 垂直，即 $\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$
- OLS 估计可看做被解释变量对解释变量的<u>投影</u> (projection)

OLS 估计的几何视角



y
X_1
col X
$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta}$
$\hat{\beta}_1 X_1$
$X\hat{\beta}$
$\hat{\beta}_2 X_2$
X_2

本节内容

AR(p) 自回归系数 OLS 估计的一致性

- 将 AR(p) 模型写为 OLS 回归的矩阵形式

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$$

其中

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} X_{p+1} \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}_{(T-p)\times 1}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_p & \cdots & X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{T-1} & \cdots & X_{T-p} \end{bmatrix}_{(T-p)\times K}$$

AR(p) 自回归系数 OLS 估计的一致性

- AR(p) 自回归系数的 OLS 估计为

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_T &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} \\
&= \left(\frac{1}{T} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X}\right)^{-1} \frac{1}{T} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} \\
&\xrightarrow{\text{a.s.}} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(0) & \cdots & \sigma_X^2(p-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_X^2(p-1) & \cdots & \sigma_X^2(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_X^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_X^2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

  由 Yule-Walker 方程可知，该 OLS 估计满足一致性

- 一致性的关键：$\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-i}] = 0,\ \forall i \geq 1$

线性回归 OLS 估计的一致性

- 估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_T$ 统计推断的基础是一致性：$\hat{\boldsymbol{\beta}}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{\beta}_0$
- 假设模型系数真实值为 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 的 OLS 估计可以写为

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_T &= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{Y} \\
&= (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \left(\frac{1}{T} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} \right)^{-1} \frac{1}{T} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta}_0 + \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{X}_t^\top \right)^{-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{X}_t \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

线性回归 OLS 估计的一致性

- OLS 回归的一般默认假设：
  1. $\{X_t\}$ 平稳，故交叉 2-阶矩矩阵 $M_{K\times K} = \mathbb{E}X_tX_t^\intercal$ 存在
  2. 进一步，M 可逆，即 M^{-1} 存在
  3. $\{\varepsilon_t\}$ 为 iid 序列，且给定 X_t 时的条件均值为 0，即 $\mathbb{E}[\varepsilon_t|X_t] = 0$；由此知 $\mathbb{E}X_t\varepsilon_t = \mathbf{0}_{K\times 1}$
  4. 进一步假设残差序列同方差：$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|X_t] = \sigma_\varepsilon^2$
- 在此组假设之下，应用大数定律

$$\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_tX_t^\intercal\right)^{-1}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\varepsilon_t \xrightarrow{\text{a.s.}} M_{K\times K}^{-1}\mathbf{0}_{K\times 1}$$

$$= \mathbf{0}_{K\times 1}$$

故 $\hat{\beta}_T \xrightarrow{\text{a.s.}} \beta_0$，即 OLS 估计量具有一致性