国际金融试验班 2019 年秋 • 时间序列

第 11 讲：向量自回归模型

授课人：刘　岩

武汉大学经管学院金融系

2019 年 12 月 19 日

本讲内容

本节内容

VAR 模型基本形式

- 向量自回归 (vector autoregression, VAR) 模型：$K\times 1$ 随机向量 $\boldsymbol{X}_t$ 具有“自回归”结构
- VAR(p) 过程：$\boldsymbol{X}_t$ 满足下列 p-阶自回归方程

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p\boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  其中 $p\geq 1$，$\boldsymbol{c}$ 为 $K\times 1$ 常数向量，$\boldsymbol{\Phi}_i$ 为 $K\times K$ 常数矩阵，$i=1,\ldots,p$
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 为向量白噪声，协方差矩阵为 $\mathrm{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)=\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t^\intercal=\boldsymbol{\Omega}$，自协方差矩阵 $\mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^\intercal=\boldsymbol{0}_{K\times K}$，$\forall i\geq 1$
- 上述 VAR 模型又称为约化形式 (reduced form)，不包括对 $\boldsymbol{X}_t$ 变量间关系的额外限制

VAR 示例

- VAR 在经济学中的流行，始于 Christopher Sims (1980) “Macroeconomics and Reality” *Econometrica*
  - 首次用 VAR 模型来讨论关键宏观经济变量的波动与交互依赖特征，放弃了传统大型计量模型范式
  - 6 个变量，货币总量，产出，失业率，价格水平，工资水平，进口价格指数
- Stock and Waston (2001, *J. Econ. Perspective*) 3 变量 VAR：

$$\boldsymbol{X}_t = [u_t, \pi_t, i_t]^{\mathsf{T}}$$

u_t 为失业率，π_t 为通胀率，i_t 为基准利率（Federal funds rate），均为季度频率

- 模型滞后阶数为 4，VAR(4)：

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_4 \boldsymbol{X}_{t-4} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

本节内容

VAR 的平稳性

- 与单变量 AR 模型类似，VAR 模型也有（协方差）平稳性问题
- 给定 VAR 方程，满足该（差分）方程的 VAR 过程 $\boldsymbol{X}_t$，未必是一个平稳过程
  - 考虑 2-元 VAR(1) 模型，滞后项矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 与单变量 AR 模型的特征多项式类似，VAR 模型也可以定义特征多项“式”——不过是矩阵取值

VAR(1) 的例子

- 考虑 K-元 VAR(1) 模型：$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$
- 类似 AR(1) 做递推展开，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{J-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-J+1} + \boldsymbol{\Phi}^J\boldsymbol{X}_{t-J} \\ &= \sum_{j=0}^{J-1}\boldsymbol{\Phi}^j\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} + \boldsymbol{\Phi}^J\boldsymbol{X}_{t-J}\end{aligned}$$

- AR(1) 的 MA 展开中，平稳性需要 ε_{t-j} 前系数具有绝对可和性质，这同时保证了 X_{t-J} 项收敛到 $0 \Leftarrow |\phi| < 1$
- 对应到 VAR(1) 中，$\boldsymbol{\Phi}$ 需要满足什么性质？

VAR(1) 的例子

- 假设 $\boldsymbol{\Phi}$ 具有 K 个互不相等的特征值 λ_k, $k = 1, \ldots, K$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$
- 定义 $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}_t$, $\boldsymbol{\zeta}_t = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$，则当 $|\lambda_k| < 1\ \forall k$ 时，

$$\boldsymbol{Y}_t = \sum_{j=0}^{J-1} \boldsymbol{\Lambda}^j \boldsymbol{\zeta}_{t-j} + \boldsymbol{\Lambda}^J \boldsymbol{Y}_{t-J} \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}^j \boldsymbol{\zeta}_{t-j}, \quad J \to \infty$$

  为平稳（向量）序列
- 此时有 $\boldsymbol{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}^j \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$
- 若 $\boldsymbol{\Phi}$ 不可对角化，但 $|\lambda_k| < 1\ \forall k$，可以用 Jordan 分解证明其平稳性

VAR(p) 的平稳性

- 考虑开始的 VAR(p) 模型，并使用滞后算子将模型改写为

$$\boldsymbol{A}(\mathscr{L})\boldsymbol{X}_t \equiv (\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1\mathscr{L} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p\mathscr{L}^p)\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

  其中 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 表示算子多项式矩阵，即矩阵中每一个元素都是 $\mathscr{L}$ 的一个多项式；$\boldsymbol{I}_K$ 表示 $K \times K$ 的单位阵

- 是否可以找到一个对应的（无穷阶）算子多项式矩阵 $\boldsymbol{B}(\mathscr{L})$，使得 $\boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{A}(\mathscr{L}) = \boldsymbol{I}_K$？
- 如若此，则有 $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{c} + \boldsymbol{B}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t$；进一步，如何保证平稳性？

算子多项式矩阵的逆

- 算子多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L}) = [A_{ij}(\mathscr{L})]_{1\le i,j\le K}$
- 为求 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 的逆，将 $\mathscr{L}$ 看做一个普通变元，或直接将 $\mathscr{L}$ 替换为复变元 $z \in \mathbb{C}$，则 $\boldsymbol{A}(\mathscr{L})$ 或 $\boldsymbol{A}(z)$ 就是一个普通矩阵求逆的问题
- Cramer 法则：

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L}) = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]}\boldsymbol{A}^{*}(\mathscr{L}), \qquad \boldsymbol{A}^{-1}(z) = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(z)]}\boldsymbol{A}^{*}(z)$$

  其中 $\boldsymbol{A}^{*}(\cdot)$ 为 $\boldsymbol{A}(\cdot)$ 的伴随矩阵
- 注意，$\boldsymbol{A}^{*}(\cdot)$ 中每个元素，只是 $\mathscr{L}$ 或 z 的 $p(K-1)$-阶多项式；而 $\det[\boldsymbol{A}(\cdot)]$ 则是 $\mathscr{L}$ 或 z 的 pK-阶多项式

平稳性的条件

- 平稳性的重点：$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的平稳性

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t = \frac{1}{\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]} \underbrace{\boldsymbol{A}^*(\mathscr{L})\boldsymbol{\varepsilon}_t}_{\mathrm{MA}(p(K-1))}$$

  分母 $\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})]$ 为算子 pK-阶多项式

- 令 $\det[\boldsymbol{A}(z)]$ 的 pK 个零点为 $z_i \in \mathbb{C}$，$i = 1, \ldots, pK$，则

$$\det[\boldsymbol{A}(z)] = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_{pK}}\right)$$

  对应的算子多项式分解为

$$\det[\boldsymbol{A}(\mathscr{L})] = \left(1 - \frac{\mathscr{L}}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\mathscr{L}}{z_{pK}}\right)$$

平稳性的条件

- 显然，$A^{-1}(\mathscr{L})\varepsilon_t$ 平稳的条件，为 $|z_i| > 1\ \forall i$
  - 即充分，且必要
- 由 $\det[A(z)] = \det[I_K - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p]$，令 $z = 1/\lambda$，则

$$\begin{aligned}\det[A(z)] &= \det[I_K - \Phi_1\lambda^{-1} - \cdots - \Phi_p\lambda^{-p}] \\ &= \det[\lambda^{-p}(I_K\lambda^p - \Phi_1\lambda^{p-1} - \cdots - \Phi_p)] \\ &= \lambda^{-pK}\det[I_K\lambda^p - \Phi_1\lambda^{p-1} - \cdots - \Phi_p]\end{aligned}$$

  平稳性的条件意味着 $|\lambda_i| = 1/|z_i| < 1$
- 当 $p = 1$ 时，$\det[A(z)] = 0 \Leftrightarrow \det[I_K\lambda - \Phi_1] = 0$，平稳性等价于 Φ 的特征值（模长）小于 1

VAR 的矩

- VAR 满足平稳性条件时，$\det[\boldsymbol{A}(z)] = \det[\boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p]$ 在 $\mathbb{C}$ 中单位圆内不等于 0，特别的 $\det[\boldsymbol{A}(1)] \neq 0$
- 此时 $\boldsymbol{A}(1) = \boldsymbol{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p$ 为可逆矩阵，故

$$\boldsymbol{\mu}_X = \mathbb{E}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}^{-1}(1)\boldsymbol{c}$$

- 当 $p \geq 2$ 时，计算协方差矩阵 $\mathrm{var}(\boldsymbol{X}_t) = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}_X)(\boldsymbol{X}_t - \boldsymbol{\mu}_X)^{\mathsf{T}}$ 需要进一步的线性代数技巧
- 当 $p = 1$ 时，$\mathrm{var}(\boldsymbol{X}_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^j \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^{\mathsf{T}j}$

本节内容

VAR 模型的估计

- 给定 VAR(p) 模型

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{X}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

- 上述方程组中每一行，都是一个动态回归模型 $\Rightarrow$ 对每一行进行 OLS 估计即可
- 将每行的 OLS 估计系数集合，得到 $\hat{\boldsymbol{c}}$, $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_i\ \forall i$，进一步可计算样本残差向量

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \boldsymbol{X}_t - \hat{\boldsymbol{c}} + \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_1 \boldsymbol{X}_{t-1} - \cdots - \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_p \boldsymbol{X}_{t-p}$$

- 最后，通过 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ 估计残差协方差矩阵

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{t=p+1}^{T} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{\intercal}$$

VAR 模型的分析：脉冲响应

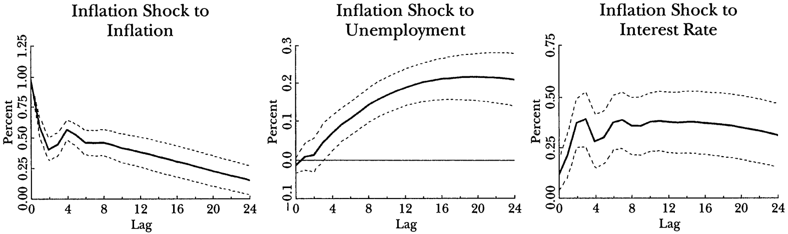
- ε_{k0} 的一个冲击，如何影响 $X_{\ell t}$ 的取值？计算

$$\frac{\partial X_{\ell t}}{\partial \varepsilon_{k0}}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

- VAR 模型下，0 期 k 变量对 t 期 ℓ 变量的影响，很容易通过递推模拟得到

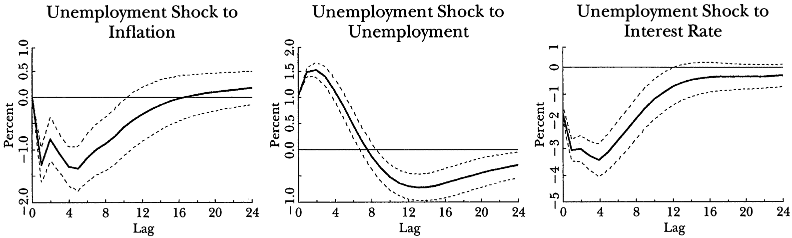
脉冲响应示例：Stock and Waston 2001

图: 通货膨胀冲击



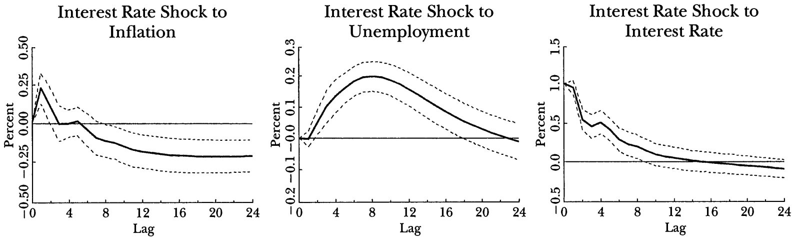
脉冲响应示例：Stock and Waston 2001

图: 失业率冲击



脉冲响应示例：Stock and Waston 2001

图: 利率冲击



方差分解与 Granger 因果检验

- VAR 模型方差分解：将 $t+s$ 期变量 ℓ 预测均方误差分解为不同变量冲击项 ε_{kt+r}，$r=1,\ldots,s$ 所带来的贡献
- Granger 因果检验：变量 k 的滞后项 $1,\ldots,p$，是否对变量 ℓ 的当期值，有显著的影响
  - 在 $X_{\ell t}$ 的回归中，检验 $X_{kt-1},\ldots,X_{kt-p}$ 的系数是否同时为 0 $\Rightarrow$ Wald 或 F 检验
  - Granger 因果性不是真的因果性，而主要是时间上的领先滞后关系
- 脉冲响应、方差分解的结果与变量排序有关

方差分解示例：Stock and Waston 2001

B.iii. Variance Decomposition of R

Forecast Horizon	Forecast Standard Error	Variance Decomposition (Percentage Points) π	u	R
1	0.85	2	19	79
4	1.84	9	50	41
8	2.44	12	60	28
12	2.63	16	59	25

Granger 检验示例：Stock and Waston 2001

A. Granger-Causality Tests

	Dependent Variable in Regression		
Regressor	π	u	R
π	0.00	0.31	0.00
u	0.02	0.00	0.00
R	0.27	0.01	0.00