高级微观经济学

第 8 讲：道德风险与激励合约

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 12 月 6 日

本节内容

1 公司金融的例子

2 线性合约

3 最优合约问题

4 金融合约

风险转移 (risk-shifting)

Jensen & Meckling (1976, JFE)

- 代理成本 (agency cost)：委托/代理 (principal-agent) 关系中利益冲突导致的效率损失
- 风险转移：债务融资的代理成本之一，公司股东/管理层与债权人之间的利益冲突

  ——风险债务的存在使得股东/管理层偏好风险更高的投资项目
- 其他代理成本：管理层与公司股东之间的代理问题，如管理层激励问题，自由现金流问题

简化模型：风险中性的企业家和投资人

- $t=0$ 投资 F，$t=1$ 选择项目 A 或 B，$t=2$ 实现收益
- $t=1$ 时的道德风险问题：企业家从互斥项目中选择一个

	$\Pr(C^H=2C)$	$\Pr(C^L=0)$	$\Pr(C^M=C)$
项目 A	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$
项目 B	$p_1+\Delta_1$	$p_2+\Delta_2$	$\cdots$

- 假设：$0<\Delta_1<\Delta_2$, $p_1+\Delta_1+p_2+\Delta_2<1$，故项目 B 风险更高并且期望收益更低
- $NPV_A=(1+p_1-p_2)C-F>NPV_B=(1+p_1+\Delta_1-p_2-\Delta_2)C-F$
- 假设 $NPV_A>0$，应该投资 F；问题在于企业家如何选择

两种融资方式：股权、债券

债券

- 假定企业通过发行面值 K 的债券融资 F
- 简化假设：$F > C$ 故只当 C^H 时企业家有正的回报：项目 A，$p_1(2C-K)$；项目 B，$(p_1+\Delta_1)(2C-K)$
- 一旦得到融资，企业家选择 B：道德风险

股权

- 假设企业家的外部融资比为 $1-\alpha$；企业家总选择最大化期望收益，且 $\alpha(1+p_1-p_2)C > \alpha(1+p_1+\Delta_1-p_2-\Delta_2)C$

当存在管理层/股东和债权人之间的代理成本时，债务融资会造成风险转移，而股权融资可以保证合适的激励约束

本节内容

1. 公司金融的例子
2. 线性合约
3. 最优合约问题
4. 金融合约

道德风险与激励合约：一般情形

- 委托人的效用为 $V(q-w)$，代理人的效用为 $u(w)-\phi(a)$
- 产出 $q=Q(\theta,a)$：θ 随机（“生产率冲击”），$a\in A$ 是代理人的行动，“努力程度”(effort)，不可观测 $\Rightarrow$ 直接以 $F(q|a), f(q|a)$ 记选择 a 时产出 q 的条件 cdf, pdf
- $V'>0, V''\le 0, u'>0, u''\le 0, \phi'>0, \phi''>0$
- 委托人激励合约 $w(q)$ 设计问题：

$$\max_{w(q),a}\int V(q-w(q))f(q|a)\mathrm{d}q$$

$$\text{subject to}\quad \int u(w(q))f(q|a)\mathrm{d}q-\phi(a)\ge \bar{u}, \tag{IR}$$

$$a\in\operatorname*{argmax}_{z\in A}\int u(w(q))f(q|z)\mathrm{d}q-\phi(z). \tag{IC}$$

CARA + Normal：线性合约

- 一般情况下最优激励合约很难得到解析解
- 特例：委托人风险中性 $q-w$，代理人 CARA $u(w,a)=-e^{-\eta[w-\phi(a)]}$，产出 $q=a+\varepsilon$， $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$
- 进一步假设 $\phi(a)=\frac{1}{2}ca^2$
- 把考虑的激励合约种类限制在线性合约 $w=t+sq$ 时，可以获取最优线性激励合约的解析解
- 但这个最优线性合约并不是最优合约；Mirrlees (1975), Bolton & Dewatripont (2005) sec. 4.3
- Holmström & Milgrom (1987) 在连续时间框架下给出了最优合约为线性的充分条件

最优线性合约

- $\mathbb{E}\{-\exp[-\eta(t+s(a+\varepsilon)-ca^2/2)]\} = -e^{-\eta(t+sa-ca^2/2)}\mathbb{E}(e^{-\eta s\varepsilon}) = -e^{-\eta(t+sa-ca^2/2-\eta s^2\sigma^2/2)}$.
- $\max_a \mathbb{E}\{-e^{-\eta[t+sq-\phi(a)]}\} \Leftrightarrow \max_a t+sa-\frac{c}{2}a^2-\frac{\eta}{2}s^2\sigma^2$.
- 故给定线性合约，最优努力 $a=s/c$
- 此时委托人的最优问题为 $\max_{t,s} s/c-(t+s^2/c)$ s.t. $t+sa-\frac{c}{2}a^2-\frac{\eta}{2}s^2\sigma^2=\bar{w}$
- 可解得 $s=\dfrac{1}{1+\eta c\sigma^2}$

本节内容

1 公司金融的例子

2 线性合约

3 最优合约问题

4 金融合约

最优合约问题：Holmström (1979) *Bell Journal of Economics*

- 给定 q 的取值范围 $[\underline{q}, \overline{q}]$；假设 $f(q|a)$ 关于 a 2 阶可微
- 委托人激励合约 $w(q)$ 设计问题 (P*)：

$$\max_{w(q),a} \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q - w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q \tag{P*}$$

$$\text{subject to} \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q - \phi(a) \geq \bar{u} \tag{IR}$$

$$a \in \underset{z \in A}{\operatorname{argmax}} \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f(q|z) \mathrm{d}q - \phi(z) \tag{IC*}$$

- (IC*) 表示原初 (primitive) 激励约束
- 有激励约束下的解也称为次优 (second best) 合约

激励合约：一阶方法 (first order approach)

- (IC*) 形式下的原初激励合约问题 (P*) 很难研究
- 在一系列正则条件 (Rogerson 1985 ECTA) 下，(IC*) 可以替换为相应的一阶、二阶条件：给定 $w(q)$ 时，代理人最优选择 a 满足

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q = \phi'(a), \tag{IC}$$

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} u(w(q)) f_{aa}(q|a) \mathrm{d}q \leq \phi''(a). \tag{IC2}$$

- 一阶方法就是将 (P*) 中的约束 (IC*) 替换为 (IC)，从而得到问题 (P) 一般说来，(IC) 是对 (IC*) 严格的放松 (relaxation)，即便加上 (IC2) 也只保证局部极大值

一阶方法的最优问题形式

- 一阶方法最优问题 (P):

$$\max_{w(q),a} \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} V(q - w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q$$

$$\text{subject to} \quad \int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f(q|a) \mathrm{d}q - \phi(a) \geq \bar{u} \tag{IR}$$

$$\int_{\underline{q}}^{\bar{q}} u(w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q = \phi'(a) \tag{IC}$$

一阶方法的最优化条件

- Lagrangian 函数：关于 $w(q)$ 和 a

$$\mathcal{L} = \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} \{[V(q - w(q)) + \lambda u(w(q))] f(q|a) + \mu u(w(q)) f_a(q|a)\} \mathrm{d}q - \lambda[\phi(a) + \bar{u}] - \mu \phi'(a)$$

关于次优合约 $w(q)$ 的一阶条件

- 对函数 $w(\cdot)$ 的最优化条件等价于对固定的 $q \in [\underline{q}, \overline{q}]$ 求关于一个实数变量 $w(q)$ 的一阶条件：

$$[-V'(q-w(q)) + \lambda u'(w(q))]f(q|a) + \mu u'(w(q))f_a(q|a) = 0.$$

- 上述条件可重写为

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

- $\mu = 0$ 时，上式是第一最优 (first best) 合约的条件
- 用反证法证明：当 $u'' < 0$ 且 $F(q|a)$ 关于 a 满足一阶占优，即 $F_a(q|a) < 0$ 对某些 q 成立，则 $\mu > 0$

$\mu > 0$：第一步

- $\mathcal{L}$ 关于 a 的一阶条件为

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} \{[V(q - w(q)) + \lambda u(w(q))] f_a(q|a) + \mu u(w(q)) f_{aa}(q|a)\} \mathrm{d}q - \lambda \phi'(a) - \mu \phi''(a) = 0.$$

- 反设 $\mu \leq 0$，利用 (IC) + (IC2)，上式等价于

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q - w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q \leq 0.$$

- 接下来的步骤会证明反向不等式成立，得到矛盾

$\mu > 0$：第二步

- 以 $w_{FB}(q)$ 表示第一最优合约可验证 $V'(q-z)/u'(z)$ 关于 z 递增
- 由 $\mu \le 0$ 可知，当 $f_a(q|a) > 0$ 时，有

$$\frac{V'(q-w(q))}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)} \le \lambda = \frac{V'(q-w_{FB}(q))}{u'(w_{FB}(q))},$$

故 $w(q) \le w_{FB}(q)$；而当 $f_a(q|a) < 0$ 时，$w(q) \ge w_{FB}(q)$

- 由此可知

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q-w(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q \ge \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q-w_{FB}(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q.$$

下面证明右边的积分 > 0

$\mu > 0$：第三步

- 由分部积分及 $F_a(\underline{q}, a) = F_a(\overline{q}, a) = 0$ 可知

$$\int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V(q - w_{FB}(q)) f_a(q|a) \mathrm{d}q =$$

$$- \int_{\underline{q}}^{\overline{q}} V'(q - w_{FB}(q))(1 - w'_{FB}(q)) F_a(q|a) \mathrm{d}q. \quad (*)$$

- 而由第一最优的一阶条件可知

$$w'_{FB}(q) = \frac{V''(q - w_{FB}(q))}{\lambda u''(w_{FB}(q)) + V''(q - w_{FB}(q))},$$

结合 $u'' < 0$ 有 $0 \le w'_{FB}(q) < 1$

- 再由 $F(q|a)$ 满足一阶随机占优，知 $(*)$ 右边 > 0

激励合约的性质

- $\mu > 0$：最优激励合约，即问题 (P) 的次优解，与第一最优合约不同
- 第一最优合约对应着无激励约束下的最优风险分担解 (委托人/代理人之间)；当存在道德风险问题，即存在激励约束时，能够达到的只能是次优风险分担
- 进一步的，考虑委托人是风险中性的情形：$V' = 1$ 此时一阶条件为

$$\frac{1}{u'(w(q))} = \lambda + \mu \frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}.$$

- 当 $\frac{f_a(q|a)}{f(q|a)}$ 关于 q 递增时，可知次优合约 $w(q)$ 关于 q 递增；而这一条件称为单调似然比性质 (monotone likelihood ratio property)

本节内容

1 公司金融的例子

2 线性合约

3 最优合约问题

4 金融合约

最优合约视角

- 经济学基本的分析对象：经济人之间的经济交易 (economic transaction) ⇒ 最基础的经济交易：两个交易者之间的交易，即一个交易合约 (contract) 所有的经济关系都可以看做某种合约，双方按照约定互相交换资源
- 市场中最简单的买卖合约：用现金交换商品
- 道德风险环境下的激励合约：委托人用工资交换代理人的努力程度；工资是状态依存的；通过合约的设计，实现最佳的激励机制
- Rothschild & Stiglitz 逆向选择问题中的合约设计：厂商通过恰当的合约区分不同技能的员工
- 更一般的，不对称信息环境下需要考虑最优合约设计 (optimal contract design) 问题

金融合约和债务合约

- 现实中的合约设计问题应用最广泛的地方就是金融：所有金融活动都是围绕金融合约展开的
- 所有金融合约中最常见的是债务合约 (debt contract)，但到底什么是债务合约？
- 法律上通常认定：有固定还本付息义务的合约，即现金流事前固定但债务人有违约的可能，此时债权人得到的现金流就与合约“约定”不符
- 是否可把债务合约看做“一部分时间支付固定现金流而其余时间现金流不固定”的一种合约？那这和一个大部分时间支付固定股利的股票合约又有什么差别？
- 需要理论来解释通常所见的债务合约安排什么情况下是最优的，并以此来理解债务合约的经济本质

最优债务合约

- 主要有两种理论来解释债务合约的最优性
- Costly state verification (CSV): Townsend (1979 JET), Gale & Hellwig (1985, RES), Diamond (1984, RES).
  ——偿付激励源自对借款人的直接干涉且是有成本的；债务合约能够最小化这一介入成本
- 不完全合约：Aghion & Bolton (1992, RES).
  ——强调对借款人资产剩余控制权的分配；债务合约能够提供有效的或有控制权转移

CSV 模型：基本设定与讨论

- 两期 $t = 0, 1$，没有折现，有限责任
- 项目 $t = 0$ 需投资 F；企业家没有初始资源，依赖外部融资
- $t = 1$ 时产生随机现金流 $\tilde{C} \in [0, \infty)$，密度为 $h(C)$.
- 只有企业家能够直接观察到现金流的实现值 C；投资人可以支付 $k > 0$ 核实 C 的大小

信息不对称带来的缔约摩擦 (contracting friction)

- 如果投资人从来不核实，企业家总会选择报告 $\hat{C} = 0$
- 投资人可以选择任何情况下都核实简化假定这是可行的方案：
  $\int_0^\infty Ch(C)\mathrm{d}C \geq F + k$
- 企业家有动力设计更有效的合约支付结构；投资人总能收支相抵，最终额外成本由企业家承担

合约设计框架

不对称信息下合约设计就是机制设计 (mechanism design)

- 企业家观察到 C，向投资人报告 $\hat{C}$；允许 $\hat{C} \neq C$
- 依据 $\hat{C}$，投资人决定是否核实；若核实，支付 k 用 $B(\hat{C})$ 表示核实决策：$B(\hat{C}) = 1$ 表示核实，$B(\hat{C}) = 0$ 表示不核实，$\forall \hat{C} \in [0, \infty)$
- 若不核实，企业家向投资人支付 $R(\hat{C})$
- 若核实，企业家向投资人支付 $\bar{R}(\hat{C}, C)$
- 合约设计：选择恰当的 $B(\cdot), R(\cdot), \bar{R}(\cdot, \cdot)$ 最大化企业家的目标函数 (期望收益)，满足激励相容约束 (最优合约下企业家不选择误报 mis-reporting) 和投资人参与约束 (期望收益减核实成本不小于初始投资)

合约设计问题：目标函数和参与约束

企业家的目标函数 (满足激励相容、没有误报)：

$$\int_0^\infty \Big[(1-B(C))(C-R(C))+B(C)(C-\bar{R}(C,C))\Big]h(C)\mathrm{d}C.$$

投资人的参与约束 IR：

$$\int_0^\infty \Big[(1-B(C))R(C)+B(C)(\bar{R}(C,C)-k)\Big]h(C)\mathrm{d}C \geq F.$$

最优合约下该式为等式，故可进一步把企业家目标函数简化为：

$$\int_0^\infty \Big[(1-B(C))C+B(C)(C-k)\Big]h(C)\mathrm{d}C-F$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^\infty Ch(C)\mathrm{d}C-F-\underbrace{k\int_0^\infty B(C)h(C)\mathrm{d}C}_{\text{最小化该项即可}}.$$

合约设计问题：激励约束

- IC1: $B(C)=1, B(\hat{C})=1 \Rightarrow \bar{R}(C,C) \le \bar{R}(\hat{C},C)$.
- IC2: $B(C)=1, B(\hat{C})=0 \Rightarrow C-\bar{R}(C,C) \ge C-R(\hat{C}) \Leftrightarrow \bar{R}(C,C) \le R(\hat{C})$.
- IC3: $B(C)=0, B(\hat{C})=0 \Rightarrow R(C) \le R(\hat{C})$.
- IC4: $B(C)=0, B(\hat{C})=1 \Rightarrow R(C) \le \bar{R}(\hat{C},C)$.
- 有限责任 LL: $\bar{R}(C,C) \le C, R(C) \le C$.
- 最优合约问题：

$$\min_{B(\cdot),R(\cdot),\bar{R}(\cdot,\cdot)} \int_0^\infty B(C)h(C)\mathrm{d}C$$

满足 IC1–IC4, LL, IR.

最优合约的结构

定理 1

最优合约问题的唯一解是一个标准债务合约，面值为 K^*，满足：

- 对所有的 $C < K^*$，$B^*(C) = 1$ 且 $\bar{R}^*(C, C) = C$；
- 对所有的 $C \geq K^*$，$B^*(C) = 0$ 且 $R^*(C) = K^*$

评注：可以把核实区域看做破产区域，把核实成本 k 看做 (i) 审计成本，(ii) 破产成本，(iii) 抵押物价值损失

证明

第 0 步：IR 取等号；若否，可缩小 $B(C) = 1$ 的区域，提高目标函数且保持 IR 成立

证明：第 1 步

所有非核实状态下的偿付额等于现金流最低的非核实状态下的偿付额

- 令 $S = \{C : B(C) = 0\}$，则对所有 $C \in S$，$R(C) = R(\underline{C}_S)$ 而 $\underline{C}_S = \inf_S C$
- 若否，存在 $C_1, C_2 \in S$ 满足 $R(C_1) > R(C_2)$，此时 IC3 不成立

证明：第 2 步

如果投资人在某个现金流状态下不核实，则其不会在现金流更高的状态下核实

- 若 $B(C_0) = 0$，则对所有 $C > C_0$，$B(C) = 0$
- 反设 $B(C) = 1$，IC2 要求 $\bar{R}(C, C) \leq R(C_0)$ 但此时若选择 $B(C) = 0$，则按照第 1 步，投资者可以得到 $R(C) = R(C_0)$，且企业家由于节省了核实费而变得更好
- 这说明核实与非核实区域不会交叉；$[0, \infty)$ 前半段是核实区域，后半段是非核实区域

证明：第 3 步

在核实状态中投资者得到所有的现金流

- 若 $B(C)=1$，则 $\bar{R}(\hat{C},C)=C$ 对任意 $\hat{C}$ 成立
- 首先，若 $\hat{C}\neq C$ 且 $\bar{R}(\hat{C},C)<C$，则增加 $\bar{R}(\hat{C},C)$ 不会破坏任一 IC 约束，对给定的核实集合，还能提高投资人收益；此时合约无效
- 其次，若对某个 C 有 $B(C)=1$ 且 $\bar{R}(C,C)<C$，同样可以增加 $\bar{R}(C,C)$，对给定的核实集合，还能提高投资人收益；此时合约无效

相关文献

- Townsend (1979) 考虑了合约双方都是风险厌恶的一般情形；定理结论依赖于两个假设 (i) 投资人是风险中性的，(ii) 核实行为是确定 (deterministic) 而非随机的
    - (ii) 中债务合约非最优；Mookherjee & Png (1989, QJE)
- Gale & Hellwig (1985) 专门讨论了债务合约的最优性；还同时考虑了企业的投资决策，说明不对称信息形式的信贷摩擦造成投资小于最优情形
- Diamond (1984) 也考虑了类似的模型，但对债务人的惩罚是采取非货币 (non-pecuniary) 形式，即直接的效用惩罚；这样可以进一步简化模型的推导
- CSV 债务合约模型在宏观经济学中获得了大量的应用：BGG 金融加速器