高级微观经济学

第 6 讲：不完美信息扩展博弈

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 11 月 22 日

本节内容

扩展形式博弈的正式描述

- 参与者集合 N；行动集合 A
- 节点集 (历史集，树) H 满足：(i) 有一个初始点 h_0；(ii) $H \setminus \{h_0\}$ 中的节点形如 $h = (a_1, \ldots, a_k)$，即历史行动决定当前节点；(iii) 若 $(a_1, \ldots, a_k) \in H \setminus \{h_0\}$，则 $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \in H \setminus \{h_0\}$，即当前节点有唯一的前一步节点
- 自然 (nature) 在初始点 h_0 从 $A(h_0) \subset A$ 中按分布 π 随机的选择一个行动 a_1 博弈终点集为 E
- 对决策节点集 $H \setminus (E \cup \{h_0\})$ 中每一点 h，指定一个参与者 $\iota(h)$ 做出决策
- 决策节点集划分为一组互不相交的信息集；每个信息集 I 满足：若 $h, h' \in I$ 则有 $\iota(h) = \iota(h')$ 且 $A(h) = A(h')$
- 参与者 i 有终点效用函数 $u_i : E \to \mathbb{R}$

信息集与参与者策略

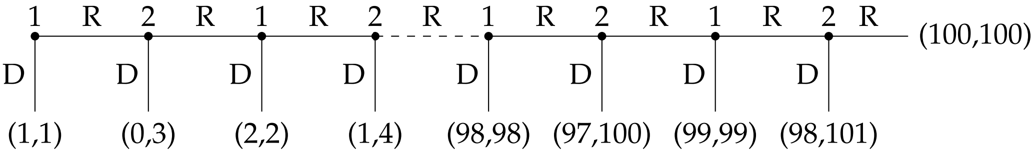
- 把信息集 I 对应的参与者记为 $\iota(I)$；$\iota(I)$ 知道他处于 I 包含的某一节点 h 中，并且需要从行动集 $A(h)$ 中做出选择
- 参与者 i 的纯策略：在每一个需要其决策的信息集上选择一个相应的行动；相应的可定义混合策略
- 所有参与者的策略 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ 共同决定了 (部分) H 以及 (部分) E 上的一个概率分布；按照这个分布可以计算各参与者的期望效用 $\mathbb{E}^\sigma u_i$
- 如果所有的信息集都是单点集 (singleton)，那么称这个博弈为完美信息 (perfect information) 博弈；除此之外，称为不完美信息 (imperfect information) 博弈

倒向归纳和子博弈 Nash 均衡

- 对于完美信息博弈，可以使用倒向归纳法 (backward induction) 获得一个解，并且这个解是 Nash 均衡
  - 例子：Stackelberg 博弈
- 对于特定的不完美信息博弈，仍可使用“倒推”的思想
- 如果一个信息集 h 是单点集，且其后节点所在的信息集中所有节点均源自 h，则从 h 开始的博弈称为子博弈 (subgame)
- 子博弈完美 (subgame perfect) Nash 均衡：限制在所有子博弈上仍然构成 Nash 均衡的策略组

倒推法可能产生反直觉结果

考虑下面的“蜈蚣”博弈 (centipede game；参见 Rosenthal 1981 JET)：



黑色节点上方 1、2 表示第一、二参与者，括号里前一数字表示 1 的收益，后一数字表示 2 的收益；这个博弈中两人轮流行动，从 1 开始，分别选择向右继续 (R) 还是向下停止 (D)，一共进行 200 轮：如果某人选择继续而下一轮中对方选择停止，那么前一个人会损失 1 单位收益而后一个人会增加 2 单位收益，以此类推

唯一 Nash 均衡违反直觉，不“合理”

本节内容

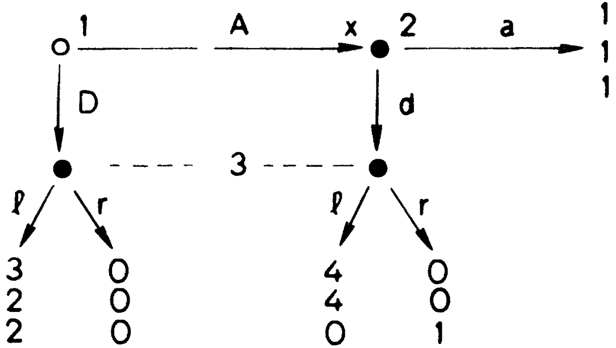
信念系统 (belief system)

- 当一个信息集 I 包含多于一个节点时，该信息集的决策者需要形成一个关于其所处节点的 (条件) 概率分布 $\mu(h), h \in I$，才能计算其在该节点所做决策的期望效用
- 所有参与者持有相同的信念系统 μ
- 这样的分布 μ 称为一个信念系统；μ 与 σ 共同确定了整个博弈树上达到各个节点的概率分布，进而对每个参与者可以计算期望效用 $\mathbb{E}^{\mu,\sigma} u_i$

序贯理性 (sequential rationality)

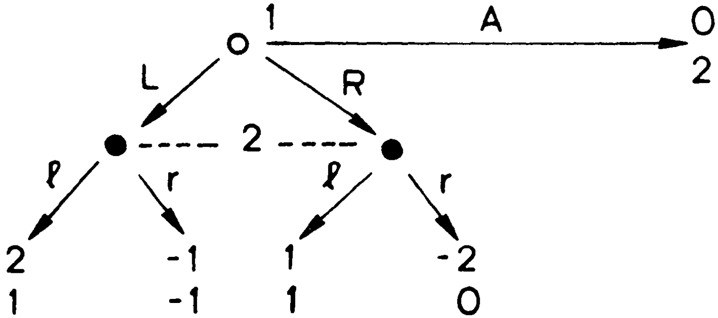
- 序贯理性要求给定所有对手的策略选择 σ_{-i} 和信念系统 μ，参与者 i 的策略选择 σ_i 需要在所有 i 做决策的信息集上都是最优的
- 简言之，序贯理性要求每一轮决策时所选策略都是给定所处状态下最优
- 子博弈完美 Nash 均衡 (SPNE) 即满足序贯理性
- 由于引入了 μ，序贯理性的适用范围比 (SPNE) 要广

序贯理性的例子 1



策略组 (D, a, ℓ) 是一个 Nash 均衡，但并不“合理”：SPNE 不适用于这个均衡，但序贯理性可以：给定 1 和 3 的策略，2 在其信息集 (单点集 $\{x\}$) 会选择 d

序贯理性的例子 2



策略组 (A, r) 是一个 Nash 均衡，但并不“合理”：序贯理性在 1 的单点信息集得到满足；而对任意信念 μ (关于 2 的信息集 $\{L, R\}$)，2 的序贯理性没有满足；合理的均衡应该是 (L, ℓ)

信念系统的确定

- 给定一个策略组 σ，如果到达一个信息集 I 的概率是正的，那么对这个信息集信念 (概率分布) 可以通过 Bayes 法则来计算：

$$\mu(h) = \frac{\Pr(h|\sigma)}{\sum_{h' \in I} \Pr(h'|\sigma)},$$

  其中 $\sum_{h'} \Pr(h'|\sigma) > 0$

- 问题：如果给定的策略组 σ 下到达某个信息集的概率是 0，如何确定该信息集的信念系统？
- Kreps & Wilson 的解决方案：信念系统要满足一致性 (consistency)

一致评估与序贯均衡

二元组合 (μ, σ) 称为一个评估 (assessment)

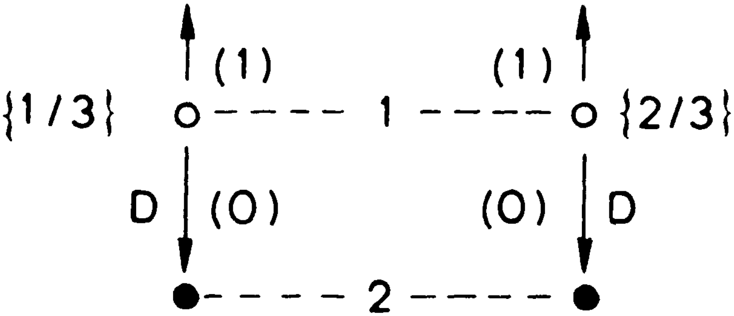
- 称 σ 为一个完全混合 (totally mixed) 策略组，如果每个参与者在每个信息集选择每个备选行动的概率都是正的；完全混合策略组通过 Bayes 法则确定了一个明确的信念系统
- (μ, σ) 称为一致 (consistent) 评估，如果存在完全混合策略策略的序列 σ^n，及其确定的信念系统序列 μ^n，使得

$$\lim_{n\to\infty}(\mu^n, \sigma^n) = (\mu, \sigma).$$

序贯均衡 (sequential equilibrium)

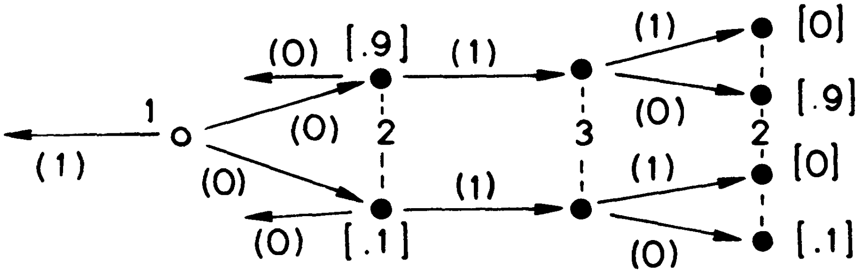
- 称 (μ, σ) 为一个序贯均衡，如果该评估是一致的并且满足序贯理性

一致性对信念系统的限制：例 1



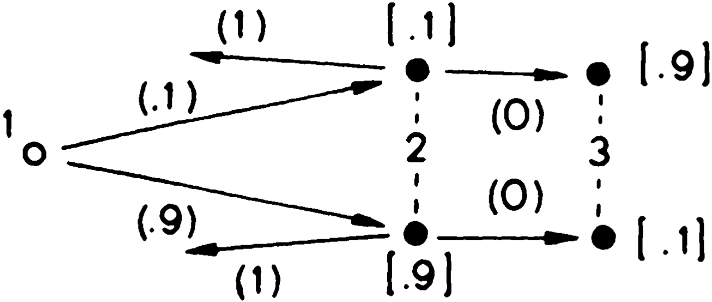
信念系统在 2 的信息集必须保证 $\mu(\text{left}) = 1/3$

一致性对信念系统的限制：例 2



信念系统在 2 的最后一个信息集不满足一致性；给定 3 的策略，2 在其两个后续信息集上的信念应该保持一致

一致性对信念系统的限制：例 3



信念系统在 3 的信息集不满足一致性；3 的信念需要与 1 的策略相一致

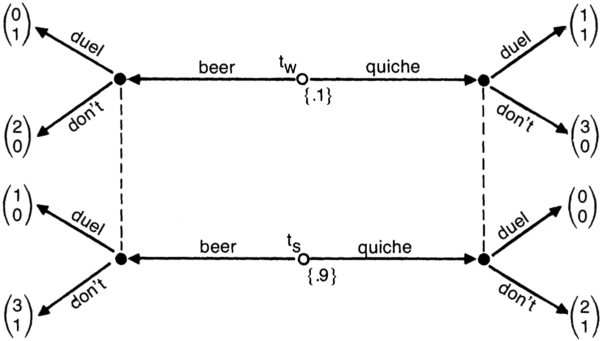
本节内容

Cho-Kreps 的例子：基本设定

两人早点铺决斗博弈

- 有两个参与者 A 和 B
- A 可能属于两种类型 (type) 中的一种：软弱 (wimpish) 或好斗 (surly)；自然 (nature) 在博弈一开始随机决定 A 的类型，$\Pr(t_s) = 0.9$
- 博弈开始时 A 就知道自己到底是哪一类；A 需要选择吃蛋饼 (quiche) 还是喝啤酒 (beer)
- A 吃完早饭就碰上 B；B 能观察到 A 早餐吃了什么，但不知道 A 是什么类型，只知道类型的分布
- B 选择要不要和 A 决斗；博弈结束

对应的博弈树



2×1 向量里的第一个份量表示 A 的收益；这个博弈可以看做是一个不完美信息博弈

进一步的解释

- A 从不同早点得到的收益取决于他的类型：如果 A 是软弱型，那他偏好蛋饼 (1 单位收益增量)；若否，则偏好啤酒 (1 单位收益增量)
- A 的收益还取决于 B 是否选择决斗：不决斗会给 A 带来 2 单位的收益增量
- B 决斗的收益取决于 A 的类型：只有当 A 是软弱型时，B 才会偏好决斗
- 当参与者的收益取决于参与者的类型时，称为不完全信息 (incomplete information) 博弈；通常还假定类型的分布是公共知识 (common knowledge：我知道 E，我知道你知道 E，我知道你知道我知道 E)

两类序贯均衡

- 第一类：t_w, t_s 都选择啤酒，B 选择不决斗；如果 A 选择了蛋饼，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率 (后验信念，posterior belief) $\mu_w \geq 0.5$，并以超过 50% 的概率选择决斗
  - 蛋饼被看作软弱型的信号 (signal)；这样的博弈也称为信号博弈 (signaling game)
- 第二类：t_w, t_s 都选择蛋饼，B 选择不决斗；如果 A 选择了啤酒，那么 B 认为 A 是 t_w 的概率 (后验信念，posterior belief) $\mu_w \geq 0.5$，超过 50% 的概率选择决斗
- 两类均衡的策略都可以包括混合策略，但均衡结果 (equilibrium outcome) 都是确定的；两类均衡也都涉及均衡外信念 (out-of-equilibrium belief)
- 这类博弈均衡的多重性跟均衡外信念紧密联系

第二类均衡的问题

- 第二类均衡中 B 的均衡外信念不是非常“合理”
- 在这类“蛋饼”均衡中，软弱型的 A 的均衡收益为 3；但如果这类 A 选择了啤酒做早餐，那么他最多可以得到的收益只有 2
- 而好斗型的 A 有可能通过选择啤酒做早餐得到更高的收益 3，若此时 B 也选择不决斗
- 因此，如果 B 看到 A 的变卦 (defect：从蛋饼到啤酒)，那么 B 应该排除是 t_w 型的可能，即 $\mu_s = 1$，如此，B 不会选择决斗；但如果好斗型的 A 意识到这个逻辑的话，那么 t_s 不应该选择蛋饼，而是啤酒

回到第一类均衡

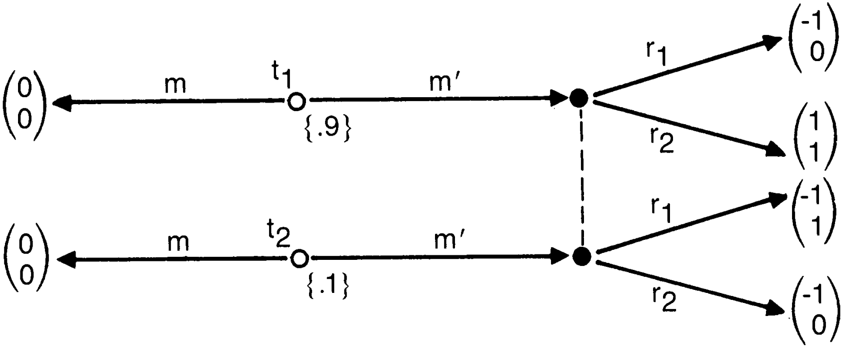
- 可以对“啤酒”均衡进行同样的论证
- 好斗型的 A 是不会变卦的，只有软弱型的 A 可能变卦；但如此一来，B 会知道变卦吃蛋饼的肯定是 t_w，所以一定选择决斗
- 软弱型预见到 B 的反应后会发现变卦是无益的
- 这不但没有排除“啤酒”均衡而且还增强了

本节内容

精炼模式

- 早餐决斗博弈中，我们论述了备选均衡中哪些“不合理”的，而选择出“合理”的
- 这样的选择过程称为均衡的精炼 (equilibrium refinement)，使用的论证模式称为精炼模式 (refinement scheme)
- 同时可以见到，对序贯均衡的精炼主要是对均衡外信念的精炼：不“合理”的均衡实质是不“合理”的均衡外信念
- 文献中有很多种精炼模式，我们举例说明两种最常用模式：占优准则 (dominance criterion) 和均衡占优准则 (equilibrium dominance criterion)；后者更常称为直观准则 (intuitive criterion)

占优准则的例子



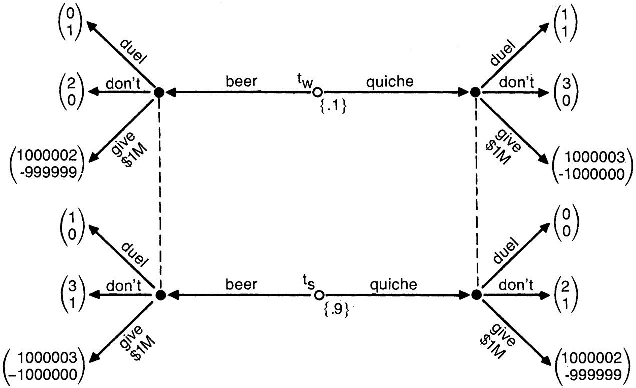
备选均衡：A 选择 m，若 A 选 m' 则 B 以超过 0.5 的概率选 r_1 且信念 $\mu(t_2) \geq 0.5$；

占优准则可以排除这样的均衡外信念：m' 是 t_2 的被占优 (dominated) 策略

均衡占优

- 早餐决斗中“蛋饼”均衡的排除就是直观准则的应用
- 特别地，给定一个均衡：(i) 我们通过对比某个类型的信息发送者 (sender) 的均衡收益和其变卦后能够得到的收益，来确定均衡外信念的形式；(ii) 在此基础上，如果有别的类型的发送者会选择偏离均衡策略的话，那么称这个均衡无法通过直观准则
- 在 (i) 中确定变卦后发送者的收益时需要考虑到信息接收者 (receiver) 也有自己的最优反应 (best response)：排除接受者选择被占优 (dominated) 策略的可能

均衡占优的例子：接收者的反应



排除 B 的被占优选择"给 A 100 万"，就可以使用直观准则