高级微观经济学

第 4 讲：异质信息与一般均衡模型

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 11 月 1 日

本讲内容

1. 信息与竞争均衡
2. Grossman-Stiglitz 模型
3. 信息效率的不可能性

本节内容

1 信息与竞争均衡

2 Grossman-Stiglitz 模型

3 信息效率的不可能性

Hayek 的论点

Hayek (1945) "The Use of Knowledge in Society," pp.526–527:

> *We must look at the price system as … a mechanism for communicating information if we want to understand its real function … The most significant fact about this system is the economy of knowledge with which it operates, or how little the individual participants need to know in order to be able to take the right action … by a kind of symbol, only the most essential information is passed on …*

现实中的异质信息

- 只从经典竞争均衡的角度看，Hayek 的论点没有问题
- 但 Hayek 还强调了每个经济参与者都有或多或少不同的信息（异质信息），因此很难想象能有比市场价格机制更加有效的信息交换机制；特别的，任何社会计划者注定不能如此有效的使用散落于各处的信息，因为存在信息获取的成本
- Hayek 的论点在 60–70 年代逐渐衍生出了有效市场假设 (efficient market hypothesis) 理论；Fama (1970)
- 异质信息下的一般均衡理论始于 Radner (1966)，但理论分析很困难
- Grossman (1975, 76, 78) 开发出一套简单、有效的分析框架；并在与 Stiglitz 的合作中 (1976, 80) 揭示了与 Hayek 预想的有所不同的结论

本节内容

1 信息与竞争均衡

2 Grossman-Stiglitz 模型

3 信息效率的不可能性

模型的基本设置

- 两期的证券交易模型：$t = 0, 1$
- $t = 0$ 时交易两类资产：无风险资产和风险资产
- $t = 1$ 时总收益率分别为常数 R 和随机变量 u
- $u = \theta + \varepsilon$：θ, ε 均为随机变量；
  $t = 0$ 时可以观测到的 θ（信号）；ε 不可观测（噪声）
- 两类交易者 (trader)：能观测到 θ 的和不能观测到 θ 的
- 两类交易者记为 I（有信息）、U（无信息），占比为 $\lambda, 1-\lambda$

效用函数和概率分布

常系数绝对风险厌恶 (CARA)+ 正态分布 (normal distribution)：金融中最常用的效用-分布组合

- $t=0$ 时交易者 i 的初始无风险、风险资产为 $\bar{M}_i, \bar{X}_i$；预算约束为 $PX_i + M_i = W_{0i} \equiv \bar{M}_i + P\bar{X}_i$
- $t=1$ 时的财富总值为 $W_{1i} = RM_i + uX_i$
- 末期效用 $V(W_{1i}) = -e^{-aW_{1i}}$，$a>0$ 为绝对风险厌恶系数
- 风险资产的总供给为 x，满足 $x = \sum_i \bar{X}_i$
- θ, ε, x：互相独立的正态分布，满足 $\mathbb{E}\varepsilon = 0, \mathbb{E}\theta\varepsilon = 0$ 以及

$$\mathrm{var}(u|\theta) = \mathrm{var}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 > 0$$

正态假设下 CARA 的期望效用

给定 $W \sim N(\mu, \sigma^2)$，可计算 $\mathbb{E}V(W)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}V(W) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aw} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(w-\mu)^2/(2\sigma^2)} \mathrm{d}w \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(w-\mu)^2 + 2aw\sigma^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}w \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(w-\mu+a\sigma^2)^2}{2\sigma^2} - a\mu + \frac{a^2}{2}\sigma^2\right] \mathrm{d}w \\
&= -\exp\left[-a\left(\mu - \frac{a}{2}\sigma^2\right)\right] \\
&= -\exp\left[-a\Bigg(\underbrace{\mathbb{E}W - \frac{a}{2}\mathrm{var}W}_{\text{均值-方差表示}}\Bigg)\right]
\end{aligned}
$$

多元正态分布

- 给定随机向量 $X = (X_1, \ldots, X_n)^\intercal$ 满足多元正态分布 $N(\mu, \Sigma)$，均值向量 $\mu = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)^\intercal$，协方差矩阵 $\Sigma = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)]_{1 \le i,j \le n}$
- X_i, X_j 相互独立当且仅当 $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$
- 给定 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$，$X_1, \ldots, X_n$ 的线性组合

$$Y = \xi_1 X_1 + \cdots + \xi_n X_n = \xi^\intercal X$$

也满足正态分布，且

$$\mathbb{E}Y = \xi^\intercal \mu, \qquad \mathrm{var}Y = \xi^\intercal \Sigma \xi$$

条件概率和条件期望

- 给定随机变量 X, Y 以及其联合密度函数 $f(x, y)$
- 给定 $X = x$，Y 的条件概率密度可表示为

$$f(y|x) = \underbrace{\frac{\Pr(X = x, Y = y)}{\Pr(X = x)}}_{\text{不严格类比}} = \frac{f(x, y)}{\int f(x, y)\mathrm{d}y}.$$

- $\mathbb{E}(Y|X = x) = \int y f(y|x)\mathrm{d}y$ 称为 Y 在 X 上的条件期望
- 记为 $\mathbb{E}(Y|X)$；可看做 X 的函数

条件期望的性质

- 全期望律 (law of total expectation)：$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)]$
- 若 X, Y 相互独立，则 $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}Y$
- 给定函数 $g(\cdot)$，$\mathbb{E}[g(X)Y|X] = g(X)\mathbb{E}(Y|X)$
- $\mathbb{E}(Y|X)$ 是 X 对 Y 的最小均方预测函数：$\mathbb{E}(Y|X)$ 是最小化问题

$$\min_{g(\cdot)} \mathbb{E}[Y - g(X)]^2$$

  的（唯一）解
- 若 $Z = g(X)$ 且 $g(\cdot)$ 是严格单调函数，则

$$\mathbb{E}(Y|Z) = \mathbb{E}[Y|g(X)] = \mathbb{E}(Y|X)$$

联合正态下的条件期望

- 给定 X, Y 服从二元正态分布
- 定义 $Z = (Y - \mathbb{E}Y) - \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}X}(X - \mathbb{E}X)$；则有 Z 为正态分布，且 $\mathbb{E}Z = 0$
- 可验证 $\text{cov}(Z, X) = \mathbb{E}ZX = 0$，故 Z, X 互相独立进一步的，$Z, g(X)$ 相互独立，故 $\mathbb{E}Zg(X) = \mathbb{E}Z\mathbb{E}g(X) = 0$
- 由此可证明 $Y - Z = \mathbb{E}Y + \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}X}(X - \mathbb{E}X)$ 是 X 对 Y 的最小均方预测（且是线性的），故

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}Y + \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}X}(X - \mathbb{E}X), \quad \text{进一步有}$$

$$\text{var}(Y|X) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X] = \mathbb{E}[Z^2|X] = \mathbb{E}Z^2$$

$$= \text{var}Y - \frac{\text{cov}(X, Y)^2}{\text{var}X}, \quad \text{是一个常数}$$

有信息交易者的期望效用与风险资产需求

- I 交易者能观测到 θ，其期望效用可写作

$$\mathbb{E}[V(W_{1i})|\theta] = -\exp\left[-a\left(\mathbb{E}(W_{1i}|\theta) - \frac{a}{2}\mathrm{var}(W_{1i}|\theta)\right)\right]$$

- 由 $W_{1i} = RW_{0i} + X_I(u - RP)$ 可知

$$\mathbb{E}(W_{1i}|\theta) = RW_{0i} + X_I(\theta - RP), \quad \mathrm{var}(W_{1i}|\theta) = X_I^2\sigma_\varepsilon^2 \Longrightarrow$$

$$\mathbb{E}[V(W_{1i})|\theta] = -\exp\left[-a\left(RW_{0i} + X_I(\theta - RP) - \frac{a}{2}X_I^2\sigma_\varepsilon^2\right)\right]$$

- I 对风险资产的需求：$\max_{X_I} \mathbb{E}[V(W_{1i})|\theta] \Longrightarrow$

$$X_I(P, \theta) = \frac{\theta - RP}{a\sigma_\varepsilon^2}$$

无信息交易者的期望效用与风险资产需求

- U 交易者不能观测到 θ，但可以从预期的均衡价格函数 $P^*(\theta, x)$ 及其实现值 P 推测 u 的信息期望效用可写作

$$\mathbb{E}[V(W_{1i})|P^*] = -\exp\left[-a\left(\mathbb{E}(W_{1i}|P^*) - \frac{a}{2}\text{var}(W_{1i}|P^*)\right)\right]$$

- 由 $W_{1i} = RW_{0i} + X_U(u - RP)$ 可知

$$\mathbb{E}[V(W_{1i})|P^*] = -\exp\left[-a\left(RW_{0i} + X_U[\mathbb{E}(u|P^*) - RP] - \frac{a}{2}X_U^2\text{var}(u|P^*)\right)\right]$$

- 给定 P^* 的实现值 P，U 对风险资产的需求：

$$X_U(P; P^*) = \frac{\mathbb{E}[u|P^*(\theta, x) = P] - RP}{a\text{var}[u|P^*(\theta, x) = P]}$$

市场出清和均衡

- 均衡时市场出清条件为：对所有的 (θ, x)

$$\lambda X_I(P^*_\lambda(\theta, x), \theta) + (1-\lambda)X_U(P^*_\lambda(\theta, x); P^*_\lambda) = x$$

- 这里的价格函数 $P^*(\theta, x)$ 具有自我实现 (self-fulfilling) 性质：如果无信息交易者具有 $P^*(\cdot)$ 这样的价格预期，那么市场将以 $P^*(\theta, x)$ 的方式出清
- 这样的均衡也称为理性预期均衡；更明确的，带噪声的理性预期均衡 (noisy rational expectations equilibrium)
- 其特点是无信息交易者可以通过均衡价格 $P^*(\theta, x) = P$ 获得收益相关状态 (payoff-relevant state) 的信息；这里是 θ

均衡的价格函数

定理 1

假设 (θ, ε, x) 服从相互独立的正态分布，则上述模型存在一个均衡价格函数 $P_\lambda^* = \alpha_1 + \alpha_2 w_\lambda(\theta, x)$，其中 α_1, α_2 为依赖于 λ 的常数，$\alpha_2 > 0$；当 $\lambda > 0$ 时，

$$w_\lambda(\theta, x) = \theta - \frac{a\sigma_\varepsilon^2}{\lambda}(x - \mathbb{E}x)$$

当 $\lambda = 0$ 时，$w_0(\theta, x) = x$

注：当 $\mathrm{var}x > 0$ 时，随机的市场总供给 x 称为市场噪声

均衡的性质

- 均衡价格 P_λ^* 所包含的关于 θ 的信息与 w_λ 相同（$\alpha_2 > 0$，P_λ^* 关于 w_λ 单调）
- 当 $\lambda > 0$ 时，因为 $\mathbb{E}(w_\lambda|\theta) = \theta$，$\mathrm{var}(w_\lambda|\theta) = \dfrac{a^2\sigma_\varepsilon^4}{\lambda^2}\mathrm{var}x$ 反映了 w_λ 包含的关于 θ 的信息
- 若 $\mathrm{var}x = 0$，则 $w_\lambda = \theta$，故 P_λ^* 完全反映了 θ，即有信息交易者所掌握的内部信息 (inside information)
  $\Longrightarrow$ 无信息交易者只需要通过观察市场价格的实现值 $P_\lambda^*(\theta, x) = P$ 就可以准确得知 θ
- 此时 ($\mathrm{var}x = 0$) 称市场是有效率的 (efficient market)，因为价格包含了所有收益相关信息；但一般情况 $\mathrm{var}x > 0$ 下，市场价格并不能完全反应收益相关信息

本节内容

1 信息与竞争均衡

2 Grossman-Stiglitz 模型

3 信息效率的不可能性

信息成本与信息获取的内生化

- 前面一直假设 λ 给定；可以通过引入信息获取成本将 λ 变为内生的均衡结果
- 具体的，定义：$(\lambda, P_{\lambda}^{*})$ 称为一个均衡，若
  当 $0 < \lambda < 1$ 时，有信息交易者与无信息交易者的期望效用相同
  当 $\lambda = 0$ 时，前者期望效用小于后者
  当 $\lambda = 1$ 时，前者期望效用大于后者
- 信息成本：若交易者在 $t = 0$ 先支付 c，然后可以观测到 θ

交易者的期望效用

- 有信息和无信息交易者的末期财富分别为：

$$W_{Ii}^{\lambda} = R(W_{0i} - c) + [u - RP_{\lambda}^{*}(\theta, x)]X_I(P_{\lambda}^{*}(\theta, x), \theta)$$
$$W_{Ui}^{\lambda} = RW_{0i} + [u - RP_{\lambda}^{*}(\theta, x)]X_U(P_{\lambda}^{*}(\theta, x); P_{\lambda}^{*})$$

- 在计算期望效用 $\mathbb{E}V(W_{Ii}^{\lambda}), \mathbb{E}V(W_{Ui}^{\lambda})$ 时，假设交易者只知道 $(\theta, \varepsilon, x, W_{0i})$ 的分布，即：交易者要先决定是否获取信息，然后才能观测到各随机变量的实现值
- W_{0i} 是随机的：P_{λ}^{*} 随机；且进一步假设 $\bar{X}_i$ 也是随机的

有信息、无信息下期望效用的比例

定理 2

假设 (θ, ε, x) 服从相互独立的正态分布，与 $\bar{X}_i$ 相互独立则有

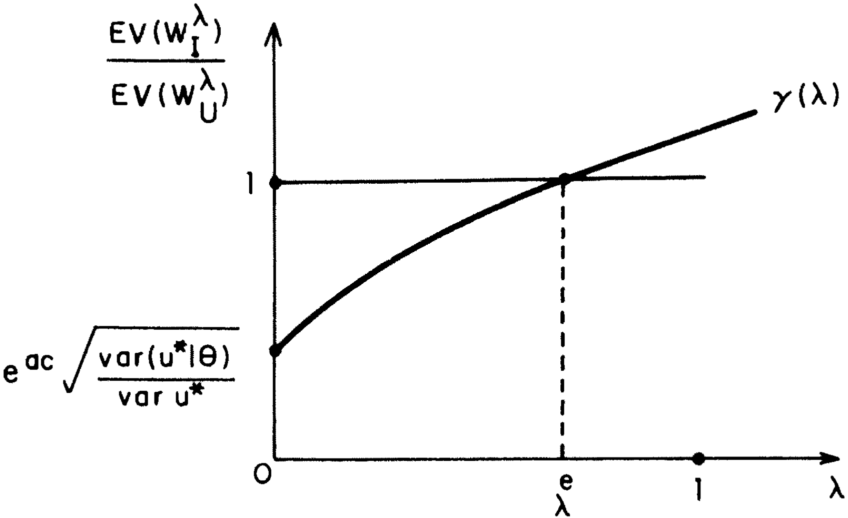
$$\frac{\mathbb{E}V(W_{Ii}^{\lambda})}{\mathbb{E}V(W_{Ui}^{\lambda})} = e^{ac}\sqrt{\frac{\text{var}(u|\theta)}{\text{var}(u|w_{\lambda})}} \equiv \gamma(\lambda)$$

注：$\mathbb{E}V(W_{Ii}^{\lambda}), \mathbb{E}V(W_{Ui}^{\lambda}) < 0$，$\text{var}(u|\theta), \text{var}(u|w_{\lambda})$ 为常数，且 $\frac{\text{var}(u|\theta)}{\text{var}(u|w_{\lambda})} < 1$

定理 3

若 $\gamma(1) < 1$，则 $(1, P_1^*)$ 是一个均衡；若 $\gamma(0) > 1$，则 $(0, P_0^*)$ 是一个均衡；若对 $\lambda \in [0,1]$ 有 $\gamma(\lambda) = 1$，则 (λ, P_{λ}^*) 是一个均衡，且当 P_{λ}^* 关于 w_{λ} 单调递增时，$\gamma(\lambda)$ 是严格递增的

均衡图示



均衡信息获取的决定：λ 的性质

- 定义
$$m = \left(\frac{a\sigma_\varepsilon^2}{\lambda}\right)^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_\theta^2}, \qquad n = \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\varepsilon^2}.$$
- 计算可知，$\mathrm{var}(u|\theta)/\mathrm{var}(u|w_\lambda) = (1+m)/(1+m+nm)$，当均衡时有 $0 < \lambda < 1$，则
$$m = \frac{e^{2ac}-1}{1+n-e^{2ac}} \Longleftrightarrow 1-\rho_\theta^2 = \frac{e^{2ac}-1}{n},$$
其中 ρ_θ 是 P_λ^*, θ 的相关系数，可验证 $\rho_\theta^2 = \frac{1}{1+m}$
- 从此可以推论出一系列关于均衡 λ 的比较静态结论

信息有效市场均衡的不可能性

定理 4

(a) 若市场无噪声 $\sigma_x^2 = 0$，则当（且仅当）$e^{ac} < \sqrt{1+n}$ 时均衡不存在；(b) 若信息是完美的 $\sigma_\varepsilon^2 = 0$，则均衡不存在

证明： 当 $\lambda = 0$ 时，$\mathrm{var}(u|\theta) = \sigma_\varepsilon^2, \mathrm{var}(u|w_\lambda) = \mathrm{var}(u) = \sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2$，故
$\gamma(0) = e^{ac}\sqrt{\sigma_\varepsilon^2/(\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\theta^2)} = e^{ac}/\sqrt{1+n}$
当 $\lambda > 0$，则有 $\gamma(\lambda) = e^{ac}/\sqrt{1 + nm/(m+1)}$ 因此，当 $\sigma_x^2 = 0$ 或 $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ 时，
$m = mn = 0$，故 $\lim_{\lambda\to 0}\gamma(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0} e^{ac} > 1$