高级微观经济学

第 3 讲：不完全市场一般均衡模型

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 25 日

本节内容

不完全市场理论的早期发展

- Radner (1972) 提出动态市场一般均衡理论框架
- Hart (1975) 指出不完全市场 (商品组合证券) 下：(1) 均衡可能不存在；(2) 均衡可能无效率；(3) 增加非冗余证券可能导致更差的配置效率
- 不完全市场理论在 80 年代的高潮：
  - Cass, Werner, Geanakoplos/Polemarchakis 等证明名义证券、计价物证券情形下均衡的存在性
  - Duffie/Shafer 证明商品组合证券下均衡“几乎处处”存在
  - Cass/Balasko, Werner, Geanakoplos/Mas-Colell 证明名义证券下均衡有严重的不定性 (indeterminacy)
  - Geanakoplos/Polemarcharkis 证明了“几乎所有”均衡都是无效率的

均衡效率概念的发展

- Diamond (1967) 年研究了一个不完全市场均衡模型的特列，提出了约束效率的概念 (constrained efficiency)；并说明他所研究的例子中均衡是约束有效的
- Hart (1975) 年的例子表明均衡可以是约束无效的
- 但令人满意的约束效率的概念直到 80 年代初才逐渐形成，主要包括 Stiglitz 及其合作者的多项工作
- 不完全市场是一种本质性的市场扭曲 (distortion)，约束无效性意味着，政府 (看得见的手) 恰当干预，有可能在 Pareto 意义下提高整体的资源配置效率，即不使一人受损，却一定能造福一方
  - 其他的市场扭曲还有很多：信息不对称，激励约束（道德风险），市场垄断势力

不完全市场理论的后续发展

- 不完全市场理论早期发展 (以两期模型为主) 被总结在 Magill and Quinzii (1996) 的教课书中：**Theory of Incomplete Markets: Vol. I**
- 90 年代初不完全市场一般均衡理论主要在无穷期方面有所推进，随后基本停滞
- 不完全市场模型在宏观经济学 (包括宏观金融) 中获得很大发展：以 Bewley 的早期贡献为基础，经过 Aiyagari, Hugget, Krusell/Smith, Rios-Roll 等人的贡献，逐渐成为宏观经济学的主流分支
- 近年来 HANK (heterogeneous agent New Keynesian) 模型的成熟与流行，是不完全市场一般均衡理论在量化政策分析方面的重要进展

基本经济环境：两期模型

- 基本商品空间 $X = \mathbb{R}_+^K$； $t = 0, 1$
- 不确定性只发生在 $t = 1$， $S = \{1, \dots, S\}$
- 家庭集合 $H = \{1, \dots, H\}$， $\{U^h, e^h\}_{h \in H}$， $U^h : X^{S+1} \to \mathbb{R}$， $(e_0^h, e_s^h)_{s \in S} \in X^{S+1}$
- 证券集合 $M = \{1, \dots, M\}$， 支付矩阵 $A = [A_1, \dots, A_M]$
- 计价商品证券、名义证券： $A_m = (a_{1m}, \dots, a_{Sm})^{\mathsf{T}}$；
  商品组合证券： $A_m = (\dots, a_{s1m}, \dots, a_{sKm}, \dots)^{\mathsf{T}}$

不同类型证券对应的预算约束与均衡

价格系统 $(q,p) \in \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}_+^{K(S+1)}$；$x_0, x_s \in X$，$y \in \mathbb{R}^M$

- $t = 0$ 的约束：$p_0 \cdot x_0 + q \cdot y \le p_0 \cdot e_0$
- $t = 1$ 的约束

  计价商品证券：$p_s \cdot x_s \le p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$

  名义证券：$p_s \cdot x_s \le p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} a_{sm} y_m$

  商品组合证券：支付总值依赖于即期市场的商品价格

  $p_s \cdot x_s \le p_s \cdot e_s + \sum_{m \in M} \left(\sum_{k \in K} p_{sk} a_{skm} \right) y_m$，因此，证券市场是否完全依赖于即期市场的价格向量

竞争均衡 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h \in H} \rangle$：所有家庭实现预算约束集上效用最大化，且市场出清

本节内容

Hart 的例子：基本设置

$H=K=S=2$；两商品记为 x,y；两状态概率相等

- 效用只取决于 $t=1$ 的消费，用下标表示 (x_{hs},y_{hs})
- 家庭 1 在每个状态中的 Bernoulli 效用为 $2^{5/2}x_{1s}^{1/2}+2y_{1s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_1=2^{3/2}x_{11}^{1/2}+y_{11}^{1/2}+2^{3/2}x_{12}^{1/2}+y_{12}^{1/2}$$

- 家庭 2 的状态效用为 $2x_{2s}^{1/2}+2^{5/2}y_{2s}^{1/2}$，期望效用为

$$U_2=x_{21}^{1/2}+2^{3/2}y_{21}^{1/2}+x_{22}^{1/2}+2^{3/2}y_{22}^{1/2}$$

- 家庭 1 的禀赋：$e_{11}=(5/2,50/21),e_{12}=(13/21,1/2)$

  家庭 2 的禀赋：$e_{21}=(1/2,13/21),e_{22}=(50/21,5/2)$

Hart 的例子：证券结构

- 两只证券：$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- 一单位 A_1 在两个状态均支付一单位商品 x；一单位 A_2 在两个状态均支付一单位商品 y
- 给定状态价格向量 $(p_1, p_2) = (p_{x1}, p_{y1}, p_{x2}, p_{y2})$，两个证券支付的价值矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} \\ p_{x2} & p_{y2} \end{bmatrix}.$$

证券市场是否完全取决于 V 是否满秩

备选 RE 均衡的第一种情形：p_1, p_2 不成比例

- 若 p_1, p_2 不成比例，则两者线性无关，从而 V 是满秩矩阵
- 若 V 满秩，则 RE 均衡一定对应于一个 AD 均衡假设这个 AD 均衡的价格向量为 $\bar{p} = (\bar{p}_{x1}, \bar{p}_{y1}, \bar{p}_{x2}, \bar{p}_{y2})$
- 家庭 1 的 AD 约束为
  $$\bar{p}_{x1}x_{11} + \bar{p}_{y1}y_{11} + \bar{p}_{x2}x_{12} + \bar{p}_{y2}y_{12} \leq \bar{p}_{x1}5/2 + \bar{p}_{y1}50/21 + \bar{p}_{x2}13/21 + \bar{p}_{y2}1/2$$
- 家庭 2 的 AD 约束为
  $$\bar{p}_{x1}x_{21} + \bar{p}_{y1}y_{21} + \bar{p}_{x2}x_{22} + \bar{p}_{y2}y_{22} \leq \bar{p}_{x1}1/2 + \bar{p}_{y1}13/21 + \bar{p}_{x2}50/21 + \bar{p}_{y2}5/2$$
- 市场出清条件为 $x_{1s} + x_{2s} = y_{1s} + y_{2s} = 3$

第一种情形的 AD 均衡

- 可解得唯一的 AD 均衡：$\bar{p} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$,

$$(x_{11}, y_{11}) = (x_{12}, y_{12}) = (8/3, 1/3)$$
$$(x_{21}, y_{21}) = (x_{22}, y_{22}) = (1/3, 8/3)$$

- 但由 AD 均衡与 RE 均衡的对应性质知，若 (p_1, p_2) 是 RE 均衡的价格向量，则应有

$$p_{x1}/p_{y1} = \bar{p}_{x1}/\bar{p}_{y1}, \quad p_{x2}/p_{y2} = \bar{p}_{x2}/\bar{p}_{y2},$$

与 p_1, p_2 不成比例的假设矛盾故此种情况下无 RE 均衡

备选 RE 均衡的第二种情形：p_1, p_2 成比例

- 首先注意到此种情况下 V 的两列也是成比例的，所以任何投资组合都无法使得在状态 1 时的净支付为正而状态 2 时的净支付为负，或相反
- 因此两个家庭都不能通过在 $t=0$ 时买卖证券在 $t=1$ 的两个状态之间转移资源
- 又由于证券选择 $z_h=(z_{h1}, z_{h2})$ 满足市场出清，$z_1=-z_2$，因此均衡时 z_1, z_2 的支付总值均为 0
- 于是 RE 均衡可通过分别求解状态 1 和 2 对应的均衡获得
- 可计算唯一的均衡价格分别为 $p_1=(2/3, 1/3), p_2=(1/3, 2/3)$，与假设矛盾

存在性的一般结果

- Radner 最早给出的存在性结果假设了证券组合 $|y_m|$ 必须是有界的；该条件满足时，可以证明家庭的预算约束对应是上半连续的；但这样的界限是人为任意选取的
- Hart 的例子表明，如果不人为添加这样的上界，那么预算约束集在 $p_1 = p_2 = (1,1)$ 处是非上半连续的，从而消费选择是不连续的，均衡不存在
- 一般情况下，Duffie and Shafer (1985) 证明，给定禀赋集合 $\mathcal{E}$ 和商品组合证券集合 $\mathcal{A}$ 为开集且效用函数满足一定的光滑条件，则对几乎所有的 $(e, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A}$，RE 均衡都存在
- Cass (1984)，Werner (1985)，Geanakoplos and Polemarcharkis (1986)，在传统的凸假设下对名义证券和计价商品证券证明了均衡的存在性

本节内容

Hart 的例子：改变证券结构

- 继续考虑 Hart 的例子只改变证券的支付结构如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 重复之前对两个情形——p_1, p_2 成或不成比例——的讨论，可以计算得到每种情形对应了唯一的 RE 均衡
- 第一种情形的均衡效用：$U_1 = U_2 = 2^{5/2}(\frac{8}{3})^{1/2} + 2(\frac{1}{3})^{1/2}$
  第二种情形：$U_1' = U_2' = 2^{3/2}(\frac{62}{21})^{1/2} + (\frac{31}{21})^{1/2} + 2^{3/2}(\frac{32}{21})^{1/2} + (\frac{1}{21})^{1/2}$
- 可验证，$U_1 = U_2 > U_1' = U_2'$

多商品环境下的约束效率的概念

继续假设 U^h 不依赖于 c_0^h；$t=0$ 时只进行计价商品证券买卖

- 对任一可行证券配置 $y=(y^h)$，即满足 $\sum_h y^h=0$，定义 y-均衡为 $\langle p,(x^h)_h\rangle$ 满足效用最大化与市场出清，其中效用最大化对应的预算约束为

$$p_s \cdot x_s \leq p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m\in M} a_{sm} y_m.$$

- 一个可行配置 $(x^h,y^h)_h$ 称为约束有效的 (constrained efficient)，如果不存在另一个可行证券配置 $\tilde{y}$ 及 $\tilde{y}$-均衡 $\langle p,\tilde{x}\rangle$ 使得 $\tilde{x}$ Pareto 优于 x

约束效率的主要结论

- Geanakoplos and Polemarcharkis (1986) 证明，给定 $K \geq 2$，给定 A 且 $M < S$，在一定的光滑性条件下，对几乎所有的 $(e, U) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$，其对应的 RE 均衡是约束无效的；其中 $\mathcal{U}$ 表示效用函数 $(U^h)_h$ 的一个给定空间
- 引起约束无效的主要原因是价格外部性 (pecuniary externality)：不完全市场下，证券重新配置不只是直接改变家庭在各个状态下财富，而且还会通过改变相对价格导致额外的财富转移；而这些额外的财富转移很有可能是不能通过单纯的证券交易实现的
  - 经典参考文献是 Greenwald and Stiglitz (1986)
- 若只有一个商品，则约束有效性得到保证，回到 Diamond (1967) 的经典结果

本节内容

均衡的不定性

- 给定一组参数，如禀赋、效用函数、证券结构等，我们可以计算对应的均衡
- 若均衡不止一个，则称其为不定的 (indeterminate)
- 名义/实际不定性 (nominal/real indeterminacy)：
  名义不定性：均衡价格 p 不止一个；
  实际不定性：消费配置 $(x^h)_h$ 不止一个
- 局部唯一性/不定性 (local uniqueness/indeterminacy)：
  局部唯一性：每个均衡的小邻域内没有别的均衡；
  局部不定性：每个均衡的任意小邻域内都有别的均衡

均衡不定性的主要结论

给定不完全市场，即 $M < S$；以及适当的效用函数光滑性

- 对于实际证券的情形 (计价商品证券和商品组合证券)，对于几乎所有的 $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$，均衡配置都是局部唯一的；详见 Geanakoplos and Polemarcharkis (1986), Duffie and Shafer (1985)
- 对于名义证券的情形，对于几乎所有的 $(e, U, A) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{A}$，均衡配置都是局部不定的；更具体的，配置空间中存在一个维数大于等于 1 的子集，使得其中每一点都是给定的 (e, U, A) 下的均衡配置；详见 Balasko and Cass (1989), Geanakoplos and Mas-Colell (1989)

太阳黑子 (sun spot) 均衡

- 不完全市场情形下还可能发生太阳黑子均衡的现象
- 假设 $H = K = S = 2, M = 0$；两个状态中两个家庭的禀赋和效用都完全一致，即没有内蕴 (intrinsic) 的不确定性；这两个状态称为外在的 (extrinsic)
- 假设每个状态的即期市场都有多个均衡，则选取两个不同的均衡 $p_1 \neq p_2$，及相应的均衡配置 $x_1^h \neq x_2^h$
- 所谓太阳黑子均衡是指：$t = 1$ 时，若所有人都相信外在状态 1 发生，则市场以 p_1 出清；若所有人都相信外在状态 2 发生，则市场以 p_2 出清
- 光滑交换经济具有三个均衡的经典例子见 Shapley and Shubik (1977)；黑子均衡最早在世代交叠模型的研究中被提出，见 Cass and Shell (1983)