高级微观经济学

第 2 讲：动态随机一般均衡模型

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 18 日

本讲内容

本节内容

1. 动态随机一般均衡模型的基本框架
2. 两种基本的市场组织结构
3. 证券市场的结构
4. 理性预期均衡的概念
5. 完全市场下均衡的性质

一个最简单的例子

- 时间：$t = 0, 1$
- $t = 0$ 时，经济处于一个确定的初始状态 s_0
- $t = 1$ 时，经济可以处于两个状态：$s_1 \in S_1 = \{s, s'\}$
- $s_1 = s$ 或 s' 会随机的发生，如天晴或者下雨
- S_1 称为 $t = 1$ 时的状态空间
- 简单地，可取 $S_1 = \{1, 2\}$，称为典范状态空间

一般的描述：有限时间、有限状态

- 时间：$t = 0, \dots, T$
- $t = 0$ 时，$s_0 \in S_0 = S^0 = \{1\}$
- $t > 0$ 时，$s_t \in S_t = \{1, \dots, S_t\}$；$S_t$ 也表示状态的数量
- 为前后一致，补充定义 $S_0 = 1$
- 称 $s^t = (s_0, \dots, s_t) \in S^t = S_0 \times \cdots \times S_t$ 为时间 t 的一条路径，也称为时间 t 的一个事件；S^t 称为时间 t 的事件集
- 所有事件的集合 $S = S^0 \cup \cdots \cup S^T$ 称为时间-事件集，有一个“树”的结构
- 时间-事件集确定了经济的所有动态、随机性

几个注释

- Kreps 书的第 16 章给出了另外一种描述方法：直接给出经济所有可能事件和时间-事件“树”
- 到目前为止，没有指定时间-事件域上的概率结构
  ——可以把样本空间 Ω 定义为时间-事件集 (事件树)S，再用 S^t 的幂集 (子集的集合) $\mathscr{S}^t$ 定义 t 时为止的事件 σ-域，$\mathscr{S} = \cup_t \mathscr{S}^t$ 为总 σ-域，最后定义 $\mathscr{S}$ 上的概率 P，则 $(S, \{\mathscr{S}^t\}_t, P)$ 为事件树上的概率空间
- 所有上面的描述方法都可以推广到可数/连续时间和可数/连续状态

经济参与者的信息结构

- 时间-事件集给出了经济信息结构的基础
- 但我们还需要指定经济中各个参与者所具有的信息结构
- 在这一讲和下一讲中，我们假设所有参与者都知道经济的时间-事件集；即所有参与者信息完全对称
- 所有参与者的消费、生产活动都发生在各个事件中
- 事件集 S 中事件的总数记为 $S = 1 + S_1 + \cdots + S_1 S_2 \cdots S_T$

本节内容

基本商品和事件依赖商品

基本商品

- 基本商品集合：$\mathcal{K} = \{1, \ldots, K\}$，由商品的内在性质界定
- 基本商品空间 $X \subset \mathbb{R}_+^K$

事件依赖商品 (event contingent commodity)

- 在事件 s^t 中生产、消费的基本商品 k 称作 s^t-依赖商品 k
- s^t-依赖商品 k 的数量记作 $x_k(s^t)$
- s^t 中的一个消费束记为 $x(s^t) = (x_k(s^t))_{k\in\mathcal{K}}$
- 事件依赖商品空间记为 $X^S \subset \mathbb{R}_+^{KS}$
- 此时消费者的偏好是定义在 X^S 上

注：状态依赖商品一词并不很准确

基本的市场组织结构：时间 0 事件依赖商品市场

- 在 $t = 0$ 时设立中央市场，包含 KS 个分市场，交易所有 KS 个事件依赖商品
- 交易机制与经典的 ADM 市场完全一致
- 交易价格记作 $p = (p_k(s^t))_{k \in K, s^t \in S} \in \mathbb{R}_+^{KS}$，称作事件依赖商品价格系统
- 习惯上也称 p 为 Arrow-Debreu 价格
- 在这种市场组织结构下，ADM 一般均衡理论仍适用
- 真实商品的交割发生在各个事件中，实质是一种远期市场 (futures markets)
- 要恰当的定义生产集合变得比较复杂，但依然可行

基本的市场组织结构：即期市场和证券市场

- 不同于 ADM t-0 市场组织形式，可以设想商品交易是在各个 s^t 分别发生
- 在每个事件中开放交易该事件依赖商品集合的市场称为即期市场 (spot markets)
- 即期市场的交易机制与普通的 ADM 市场一致
- 每个即期市场的价格系统记作 $r(s^t) = (r_k(s^t))_{k \in K}$
- 但如果只有即期市场，那么消费者的会受到很大限制：
  - 无法进行跨期 (intertemporal) 配置，储蓄/借贷受限；
  - 无法进行跨状态 (inter-state) 配置，投资/保险受限
- 为此需要增加证券 (security) 及相应的证券市场

证券的基本结构

基本单位证券

- 基本单位证券：在 s^t 合约双方约定，持有人于 $s^{t+1} = (s^t, s_{t+1})$ 获得发行人**一单位**（？）支付
- 也称为 Arrow 证券
- 更复杂的证券都可以分解为一系列基本单位证券的叠加

支付单位的确定

- 最大的问题是什么是 s^{t+1} 中的支付单位？
- 需要确定记账单位 (unit of account) 和计价物 (numeraire)
- 实物证券：以某个基本商品 k 为计价物，或者一个商品组合为计价物
- 名义证券：以某种名义记账单位为计价物

本节内容

基本假设：两期的交换经济

- 基本商品空间 $X = \mathbb{R}_{+}^{K}$；$t = 0, 1$
- 不确定性只发生在 $t = 1$，$S = \{1, \ldots, S\}$
- 家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，$\{U^h, e^h\}_{h \in H}$；其中 $U^h : X^{S+1} \to \mathbb{R}$，$(e_0^h, e_s^h)_{s \in S} \in X^{S+1}$
- 考虑动态市场交易结构 (dynamic market trading)：商品交易发生在事件依存即期市场，并通过证券交易达到跨期、跨状态的资源配置

单一证券的定义

在动态随机一般均衡模型中，一只证券 (security) 由其在各个随机事件中的支付 (payment) 所界定

按照支付的形式，证券可以分为三类：

- 一般商品组合支付证券；
- 计价商品 (numeraire) 支付证券；
- 名义计价单位 (nominal unit of account) 支付证券

其中前两种合称为实际 (real) 证券，后一种称为名义或金融 (financial) 证券

单只证券的向量表达

- 一般商品组合证券

$$A = (a_1^1, \ldots, a_1^K, \ldots, a_s^1, \ldots, a_s^K, \ldots, a_S^1, \ldots, a_S^K) \in \mathbb{R}_+^{KS},$$

a_s^k 表示一单位证券在事件 s 中支付的商品 k 的数量

- 计价商品证券——选取商品 1 为计价物

$$A = (a_1, \ldots, a_S) \in \mathbb{R}_+^S,$$

a_s 表示在事件 s 中支付的计价物 (商品 1) 的数量

- 名义证券

$$A = (a_1, \ldots, a_S) \in \mathbb{R}_+^S,$$

a_s 表示在事件 s 中支付的名义计价物 (货币) 的数量

证券交易市场

- 给定证券集合 $\mathcal{M} = \{1, \ldots, M\}$，每只证券记为 A^m
- 所有证券在 $t = 0$ 的集中市场交易，遵循 ADM 惯例
- 一个证券组合记为 $y = (y_1, \ldots, y_M) \in \mathbb{R}^M$
- 一组证券价格记为 $q = (q_1, \ldots, q_M) \in \mathbb{R}^M_+$；通常选取与 $t = 0$ 即期市场相同的计价单位
- 证券组合 y 在价格 q 下的总价值为 $q \cdot y$

证券支付矩阵

- 给定 M 只证券 $\{A_1,\ldots,A_M\}$，每个 A_m 视为列向量
- 其在 $t=1$ 的支付矩阵定义为 M 列的矩阵 $A=[A_1,\ldots,A_M]$
- 当 $\{A_m\}_{m\in M}$ 是计价商品证券或名义证券时，

$$A=[A_1,\ldots,A_M]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sm} & \cdots & a_{sM} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{S1} & \cdots & a_{Sm} & \cdots & a_{SM} \end{bmatrix}$$

是一个 $S\times M$ 的矩阵

证券组合支付的矩阵表达

以下我们只考虑计价商品证券和名义证券

- 给定证券支付矩阵 A 和证券组合 y (记为 $m \times 1$ 的列向量)
- 组合 y 在 $t = 1$ 时的支付总额为 A 与 y 的矩阵乘积：

$$Ay = \begin{bmatrix} \sum_m a_{1m} y_m \\ \vdots \\ \sum_m a_{Sm} y_m \end{bmatrix},$$

  其中 $\sum_m a_{sm} y_m$ 表示事件 s 中证券组合的支付总额
- 特别的，证券组合满足线性性：y, y' 为两个证券组合，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则组合 $\alpha y + \beta y'$ 的总支付为 $\alpha A y + \beta A y'$

线性独立证券

给定 $A_1, \ldots, A_M$

- 若存在 $M-1$ 个不全为零的实数 $y_1, \ldots, y_{m-1}, y_{m+1}, \ldots, y_M$ 使得

$$A_m = y_1 A_1 + \cdots y_{m-1} A_{m-1} + y_{m+1} A_{m+1} + \cdots + y_M A_M,$$

  则称 A_m 为冗余证券

- 若给定的 M 只证券 $\{A_1, \ldots, A_M\}$ 中不存在冗余证券，则称其为线性独立证券集合
- 线性代数的基础知识：给定 $\{A_1, \ldots, A_M\}$，则其中线性无关的证券数量小于等于 $\min\{S, M\}$

证券市场的结构

不失一般性，假设 $t = 0$ 市场中交易的 M 只证券 $A_1, \ldots, A_M$ 均相互线性独立，则 $M \leq S$

- 若 $M = S$，则称该证券市场为**完全市场** (complete market)
- 若 $M < S$，则称该证券市场为**不完全市场** (incomplete market)
- 给定 $A_1, \ldots, A_M$ 相互线性独立，支付矩阵 A 的秩为 M；完全市场对应于满秩的方阵 A

两类典型的证券市场

- $M = S$，$A = [A_1, \dots, A_S] = I$ 为单位阵，即对任一 s，

$$A_s = (0, \dots, \underbrace{1}_{\text{第 } s \text{ 位}}, \dots, 0)^\top,$$

符号 $\top$ 表示 (矩阵) 转置；只在事件 s 有单位支付的证券 A_s 称为 Arrow 证券，或事件依存单位证券

- 完全市场的一个等价定义就是存在对应于所有事件 s 的 Arrow 证券
- $M = 1$，$A = \iota = (1, \dots, 1)^\top$ 全为 1；称为无风险证券

本节内容

价格向量及预期

- $t = 0$ 时即期市场的价格向量记作 $p_0 \in \mathbb{R}_+^K$
- $t = 1$ 事件 s 中即期市场的价格向量记作 $p_s = (p_{s1}, \ldots, p_{sK}) \in \mathbb{R}_+^K$
- 整个价格向量记作 $p = (p_0, p_1, \ldots, p_S)$
- $t = 0$ 时，$t = 1$ 的即期市场还没开放交易，$(p_s)_{s \in S}$ 是无法观测的！
- 因此，家庭 h 在 $t = 0$ 做消费决策时，必须形成对 $t = 1$ 时 S 个事件依赖市场中通行价格系统的预期
- $(p_s)_{s \in S}$ 只是价格 (系统) 的预期 (expectation)

分期、分事件的预算约束

- 一个消费计划可以表示为 $x = (x_0, (x_s)_{s\in S}) \in \mathbb{R}_+^{K(S+1)}$
- 给定一组证券 $A = [A_1, \ldots, A_M]$，证券组合记为 $y \in \mathbb{R}^M$
- 给定 $t = 0$ 时的价格系统 (p_0, q)，家庭的预算约束为

$$\{(x_0, y) \in \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}^M : p_0 \cdot x_0 + q \cdot y \le p_0 \cdot e_0\}$$

  注意 q 的单位与 p_0 相同
- 给定 $t = 0$ 时的价格预期 $(p_s)_{s\in S}$，家庭在各个事件 $s \in S$ 中的预算约束为

$$\left\{x_s \in \mathbb{R}_+^K : p_s \cdot x_s \le p_s \cdot e_s + p_{s1} \sum_{m\in M} a_{sm} y_m\right\}$$

总和预算约束

给定一组计价商品证券 $A=[A_1,\ldots,A_M]$；给定家庭的禀赋 e，价格 (预期) 向量 (p,q)，则其在 $t=0$ 做消费及证券 (投资) 选择时的预算约束为

$$B(p,q)=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{K(S+1)}\times\mathbb{R}^M : p_0\cdot x_0+q\cdot y\le p_0\cdot e_0,$$
$$\text{且} p_s\cdot x_s\le p_s\cdot e_s+p_{s1}\textstyle\sum_{m\in M}a_{sm}y_m, s=1,\ldots,S\Big\}$$

隐藏假设：对所有 s，$p_{s1}>0$；计价商品证券总有价值

理性预期均衡

定义 1

考虑两期动态随机交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$，给定动态交易市场结构与一组计价商品证券 $A = [A_1, \ldots, A_M]$；称四元组 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h\in H}\rangle$ 为一个理性预期 (rational expectations) 竞争均衡，如果下面两组条件得到满足：

1. 给定价格 (预期)，对所有 $h \in H$，(x^h, y^h) 在 $B^h(p, q)$ 上最大化 U^h
2. 配置 $(x^h, y^h)_{h\in H}$ 满足市场出清

$$\textstyle\sum_h x^h = \sum_h e^h, \qquad \sum_h y^h = 0$$

“理性”注释：所有市场参与者具有相同且正确的预期

理性预期均衡的几点历史注释

- 动态交易及证券市场结构最早由 Arrow 于 1953 年在文章 “The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing” 中提出；其中已经包含了理性预期的概念
- Roy Radner (1968, 1972) 正式提出了动态随机条件下动态交易及证券结构的一般模型，定义了理性预期均衡的概念，并给出了存在性的一些结论
- Radner (1972) 最早使用了 equilibrium of plans, prices, and price expectations (EPPPE) 的名称；Kreps(2012) 沿用了这个名称；后来文献也称之为 Radner 均衡
- 随着宏观经济学在 70 年代末大幅转向理性预期的理论框架，理性预期均衡成为更流行的术语

"理性预期"名词的几点注释

- "理性预期"的称呼最早由 John F. Muth (1961) 在文章 "Rational Expectations and the Theory of Price Movements" 中提出；但起初并没有获得重视
- Robert Lucas 60 年代末在 CMU 任职时接触并接受了 Muth 的"理性预期"概念，后又认识到 Arrow-Debreu-Radner 的"理性预期"所对应的动态随机均衡理论可以直接应用在宏观问题研究中，再之后就有了理性预期革命
- "理性预期"概念与均衡相联系，Muth 最早的模型就是一个均衡模型
- 本质上，理性预期概念与 Nash 均衡一脉相承：给定对手选择均衡策略的预期，我也选择均衡策略，结果实现均衡

本节内容

理性预期均衡性质概览

- 动态市场情形下理性预期均衡的性质与给定的证券市场结构有很大关系
- 完全市场理性预期均衡与 Arrow-Debreu 均衡等价
- 但不完全市场理性预期均衡的就有各种问题；不完全市场是一种典型的市场失灵 (market failure)，伴随市场扭曲 (market distortion) 或市场摩擦 (market friction)

当前模型中的 AD 均衡

定义 2

考虑两期动态随机交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h \in H}$，并给定 AD 事件依存商品市场结构，则二元组 $\langle p, (x^h)_{h \in H} \rangle$ 称为一个 AD 竞争均衡，如果下列条件得到满足：

- 给定 p，对所有 $h \in H$，x^h 在

$$B^h(p) = \left\{ z^h \in \mathbb{R}_+^{K(S+1)} : p \cdot z^h \leq p \cdot e^h \right\}$$

  上最大化 U^h

- 市场出清：$\sum_h x^h = \sum_h e^h$

完全市场理性预期均衡与 AD 均衡的等价性

定理 1

给定动态随机交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h\in H}$ 且假设 U^h 均为单调的，若在动态市场交易结构下给定的证券市场是完全的，则对任一理性预期均衡 $\langle p, q, (x^h, y^h)_{h\in H}\rangle$ 满足 $(p_{11}, \ldots, p_{S1}) \gg 0$，存在一个 AD 均衡 $\langle \hat{p}, (\hat{x}^h)_{h\in H}\rangle$ 满足 $(\hat{p}_{11}, \ldots, \hat{p}_{S1}) \gg 0$，使得 $(x^h)_{h\in H} = (\hat{x}^h)_{h\in H}$；反之亦然

完全市场理性预期均衡的福利性质

按均衡定义，$t=0$ 时证券总量为零 $\sum_h y^h = 0$，故 $t=1$ 时证券净支付总额 $A\sum_h y^h = 0$，因此，证券交易不改变经济中资源总量 $\sum_h e^h$；再由完全市场理性预期均衡与 AD 均衡的等价性，得到如下重要结论：

定理 2 (动态市场条件下福利经济学第一定理)

完全市场理性预期均衡对应的消费配置是 Pareto 最优的

注：完全市场动态交易机制可以实现最有效率的跨期、跨状态资源配置，保证最优的风险分担 (risk-sharing)

完全市场理性预期均衡的福利性质

与 ADM 市场一样，上述定理的逆命题成立，即福利经济学第二定理

定理 3 (动态市场条件下福利经济学第二定理)

动态经济中任一 Pareto 最优配置，均可在完全市场条件下由理性预期均衡实现

注：完全市场是关键；下讲会讲到，若市场不完全，则竞争均衡配置通常不是 Pareto 最优配置，且总存在 Pareto 最优配置无法通过理性预期均衡来实现 $\Rightarrow$ 有形之手的市场干预对于提高经济整体的资源配置效率，是必要的