高级微观经济学

第 1 讲：微观经济学经典理论

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 10 月 11 日

本讲内容

1. 经典消费者理论
2. 经典企业理论
3. 经典一般均衡理论
   - 基本框架
   - 均衡概念
   - 均衡存在性
   - 均衡的福利性质

本节内容

消费者偏好

- 商品空间 $X \subset \mathbb{R}_+^K$：通常直接取做 $\mathbb{R}_+^K$
- 偏好 $\succsim$：X 上的一个二元关系，满足
  1. 完全性——对任意的 $x, y \in X$，$x \succsim y$ 或者 $y \succsim x$；
  2. 反身性——对任意的 $x \in X, x \succsim x$；
  3. 传递性——对任意的 $x, y, z \in X$, 若 $x \succsim y$，$y \succsim z$，则 $x \succsim z$
- 进一步地，可定义
  1. $x \precsim y$，若 $y \succsim x$；
  2. $x \sim y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \succsim x$；
  3. $x \succ y$，若 $x \succsim y$ 且 $y \not\succsim x$

偏好的性质与表示

偏好的性质

- 连续性：对任意的 $x \in X$，$\{y \in X : y \succsim x\}$ 和 $\{y \in X : y \precsim x\}$ 都是 X 中的闭集
- 单调性：若 $x \geq y$，则 $x \succsim y$；且若 $x \gg y$，则 $x \succ y$
- 凸性：X 是凸集；若 $x, y \succsim z$，则对任意的 $\alpha \in [0, 1]$，有 $\alpha x + (1 - \alpha) y \succsim z$

偏好的效用函数表示

- 若有 $U : X \to \mathbb{R}$ 满足 $x \succsim y$ 当且仅当 $U(x) \geq U(y)$，则称 U 为 $\succsim$ 的一个表示

效用函数的性质

- 给定偏好 $\succsim$，若 U 是 $\succsim$ 的表示，则对于任意的单调递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f\circ U: x\mapsto f(U(x))$ 也是 $\succsim$ 的表示
- 若 $\succsim$ 是凸的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 是拟凹的 (quasi-concave)
- 若 $\succsim$ 是单调的，则 $\succsim$ 的任一表示 U 满足：$U(x)\geq U(y)$，若 $x\geq y$；且 $U(x)>U(y)$，若 $x\gg y$

效用表示的存在性

定理 1 (Debreu, 1954)

若 X 上的偏好 $\succsim$ 是连续的，则存在连续函数 $U: X \to \mathbb{R}$ 使得 U 是 $\succsim$ 的效用函数表示

注 1 Rubinstein 第二章证明了一个较弱的结论，即连续偏好有效用函数表示（但该效用函数不一定连续）；MWG，Kreps 和 JR 中均在额外假设偏好单调的情形下给出了证明

注 2 若偏好不连续，则可能不存在效用函数表示；见 Rubinstein 第二章中 lexicographic 偏好的例子

消费者最优化问题

- 给定商品空间 $X = \mathbb{R}^K_+$ 及（相对）价格系统 $p \in \mathbb{R}^K_+ \setminus \{0\}$
- 给定消费者的偏好（假设其连续）及相应的效用函数表示 $U : X \to \mathbb{R}$；给定该消费者的禀赋 (endowment) 向量 $e \in \mathbb{R}^K_+$
- 消费者的预算约束 (budget constraint) 集合为：

$$B(p) = \{x \in X : p \cdot x \le p \cdot e\}.$$

- 消费者效用最优化问题为：$\max_{x \in B(p)} U(x)$
- 该问题的解（当存在时），$D(p) = \operatorname{argmax}_{x \in B(p)} U(x)$，称为需求对应 (demand correspondence)

消费者最优化问题的几个性质

- 齐次性：任取 $\alpha > 0$，由 $B(p) = B(\alpha p)$ 知 $D(p) = D(\alpha p)$
- 可取标准化价格空间：$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^K : \sum_k p_k = 1\}$，即 $K-1$ 维单纯形 (simplex)
- 把 $B(p)$ 视作 $\Delta \rightrightarrows X$ 的对应若 $e \gg 0$，则 B 连续
- 若 U 是拟凹函数，则 $D(p)$ 是凸集
- 注意，$D(p)$ 和 Marshallian 需求对应不一样，后者所对应的预算集合为

$$B(p, w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\},$$

其中 $w > 0$ 为收入

本节内容

生产技术的描述

生产集合

- 企业的生产计划 (production plan) 由 $\mathbb{R}^K$ 中的点 y 表示
- y 的负坐标对应投入品，正坐标对应产出品
- 企业的生产集合 (production set) 记为 Y
- 这种描述方法比生产函数的方法更一般

通常假设单个企业的 Y 满足：

- $Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$——不能无中生有；
- Y 是闭凸集；
- $Y + \mathbb{R}^K_- \subset Y$——实质是可自由处置 (free disposal) 任何多余产品

企业目标和所有权结构

完全竞争下企业利润最大化

- 给定价格系统 $p \in \Delta$，企业利润为 $p \cdot y$
- 企业利润最大化：$\max_{y \in Y} p \cdot y$

所有权结构与利润分配

- 假设经济中 H 个家庭共同拥有一个企业
- 每个家庭享有 $\theta^h \in [0, 1]$ 的权益，$\sum_h \theta^h = 1$
- 每个家庭的分配到的利润为 $\theta^h p \cdot y$

本节内容

经典一般均衡模型的基本市场结构

- 给定商品集合 $K = \{1, \ldots, K\}$
- 一个中央市场 (centralized market)，分为 K 个分市场
- 市场参与者（家庭或企业）只在中央市场进行买卖交易
- 所有 K 个分市场同时开启，每个市场 k 公布一个价格 p_k
- 参与者获知价格系统 $p = (p_1, \ldots, p_K)$，并各自决定对每个商品的需求与供给
- 所有交易决策汇总到形成总需求/供给；然后市场关闭
- 每个参与者只关心价格；无视其他参与者
- 竞争性体现在市场参与者均在给定价格下决策，而非厂商利润为 0

若干注记

- 经典一般均衡模型也称为 Arrow-Debreu-McKenzie 模型
  - Kenneth Arrow and Gerard Debreu (1954) “Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy” Econometrica.
  - Lionel McKenzie (1959) “On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market” Econometrica.
  - 但两篇文章同样在 1953 年的 Econometric Society 冬季会议上宣讲了
- ADM 模型竞争性均衡相关理论统称为经典一般均衡理论
- Debreu (1959) **Theory of Value** 是经典参考文献
- Debreu (1982) **Handbook of Mathematical Economics** 的相关章节包括经典一般均衡理论后续发展的很多结果

交换经济 (exchange economy)

给定家庭集合 $H=\{1,\ldots,H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h: X=\mathbb{R}_+^K \rightarrow \mathbb{R}$ 与禀赋 $e^h \in X$

定义 1 (交换经济的竞争均衡)

给定一个交换经济 $\mathcal{E}=(e^h, U^h)_{h\in H}$，价格系统 $p \in \Delta$ 与商品配置 $(x^h)_{h\in H}$ 的组合 $\langle p, (x^h)_{h\in H}\rangle$ 构成一个竞争均衡(competitive equilibrium)，若下列条件得到满足：

1. 对每个家庭 $h \in H$，有 $x^h \in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p)} U^h(z)$，其中 $B^h(p)=\{z \in X: p\cdot z \leq p \cdot e^h\}$；
2. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h-e^h)=0$

生产经济的描述 (production economy)

企业

- 给定企业集合 $J = \{1, \ldots, J\}$，及每个企业的生产集合 $Y^j \subset \mathbb{R}^K$

家庭

- 给定家庭集合 $H = \{1, \ldots, H\}$，及每个家庭对应的效用函数 $U^h : X = \mathbb{R}_+^K \to \mathbb{R}$，禀赋 $e^h \in X$，与所持有的 J 个企业的权益份额 $\theta^h = (\theta_1^h, \ldots, \theta_J^h)$
- $(\theta^h)_{h \in H}$ 对所有 $j \in J$ 满足 $\sum_h \theta_j^h = 1$

生产经济的均衡概念

定义 2 (生产经济的竞争均衡)

给定一个生产经济 $\mathcal{E} = \left((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J}\right)$，价格系统与商品配置（包括一组生产计划）的组合 $\langle p, (x^h)_{h\in H}, (y^j)_{j\in J}\rangle$ 构成一个竞争均衡，若下列条件得到满足：

1. 对每个企业 $j \in J$ 有 $y^j \in \operatorname{argmax}_{z\in Y^j} p\cdot z$；
2. 对每个家庭 $h \in H$ 有 $x^h \in \operatorname{argmax}_{z\in B^h(p,(y^j)_j)} U^h(z)$，其中
   $B^h(p,(y^j)_j) = \left\{z \in X : p\cdot z \le p\cdot e^h + \sum_{j\in J}\theta^h_j p\cdot y^j\right\}$；
3. 市场出清 $\sum_{h\in H}(x^h - e^h) - \sum_{j\in J} y^j = 0$

均衡存在性：Arrow-Debreu 方法概要

- Arrow-Debreu (1954) 的经典证明是把均衡模型转化为一个广义博弈 (generalized game)
- 类似于 Nash (1950) 对 Nash 均衡存在性的证明，先证明该广义博弈有一个 Nash 均衡 $\langle p^*, \text{配置}^* \rangle$
- 再证明这个 Nash 均衡是一个竞争均衡；特别地，配置* 满足市场出清条件
- McKenzie 的证明方法不同，是直接考虑加总净需求 $Z(p) = \sum_h (D^h(p) - e^h)$

广义博弈

概念

- 给定参与者集合 $N = \{1, \ldots, N\}$
- 给定每个参与者 $n \in N$ 的初始策略集 S^n；S^n 是欧式空间的一个紧致凸子集
- 定义 $S = S^1 \times \cdots \times S^N$，并定义每个参与者 n 的收益函数 $\pi^n : S \to \mathbb{R}$
- 定义参与者 n 的策略限制对应 $\varphi^n : S \rightrightarrows S^n$
- 称组合 $\widetilde{\Gamma} = (S^n, \pi^n, \varphi^n)_{n \in N}$ 为一个广义博弈

注：若 $\varphi^n(s) \equiv S^n$，即没有策略限制，则 $\widetilde{\Gamma}$ 就是一个博弈

广义博弈的 Nash 均衡

最优回应对应

- 给定一个策略组 (strategy profile) $s = (s^1, \ldots, s^N)$
- 参与者 n 的单方偏离 (unilateral deviation) 定义为 $s|_n t = (s^1, \ldots, t, \ldots, s^N)$
- 参与者 n 在 s 处的最优回应集 (best reply set) 定义为
  $\beta^n(s) = \operatorname{argmax}_{t \in \varphi^n(s)} \pi^n(s|_n t)$
- $\widetilde{\Gamma}$ 的最优回应对应 (best reply correspondence) 定义为 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$

定义 3 (广义博弈的 Nash 均衡)

若策略组 s 满足 $s \in \beta(s)$，则称其为 $\widetilde{\Gamma}$ 的一个 Nash 均衡

Nash 均衡的存在性

定理 2

给定 $\widetilde{\Gamma}$ 若对所有 $n \in N$，π^n 关于 s 连续，关于 s^n 拟凹，并且 φ^n 是连续、紧致且凸取值的对应，则 Nash 均衡存在

证明.

由 π^n 关于 s^n 拟凹且 φ^n 凸取值，知 β^n 取值为凸集给定 φ^n 连续且紧致，由 Berge 最大值定理知 β^n 上半连续且紧致；可验证 $\beta = \beta^1 \times \cdots \times \beta^N : S \rightrightarrows S$ 也是上半连续、紧致且凸的，故由 Kakutani 不动点定理知存在 $s \in S$ 满足 $s \in \beta(s)$ □

交换经济中竞争均衡的存在性

定理 3

给定交换经济 $\mathcal{E}=(U^h,e^h)_{h\in H}$，若下列条件得到满足：

1. 对任意 $h\in H$，$e^h\gg 0$
2. 对任意 $h\in H$，U^h 连续、拟凹且单调
3. 对任意商品 $k\in K$，存在 $h\in H$，使得每当 $x\geq y$ 且 $x_k>y_k$ 时 $U^h(x)>U^h(y)$ 成立

则存在一个竞争均衡

均衡存在性的证明：定义一个广义博弈

- 选取 $m > \max_k \sum_h e_k^h$，定义 $M = \{x \in X : x_k \leq m\}$
- 给定 H 个家庭参与者，外加一个特别的价格参与者
- 定义策略空间 $S = \Delta \times M \times \cdots \times M$
- 定义家庭参与者 $h \in H$ 的收益函数 $\pi^h : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^h(p, x^1, \ldots, x^h, \ldots, x^H) = U^h(x^h)$$

- 定义价格参与者的收益函数 $\pi^0 : S \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi^0(p, x^1, \ldots, x^H) = p \cdot \sum_h (x^h - e^h)$$

- 定义参与者的策略限制对应为

$$\varphi^h(p, x^1, \ldots, x^H) = B^h(p) \cap M, \quad \varphi^0 \equiv \Delta$$

均衡存在性的证明：广义博弈的 Nash 均衡

- 验证上述定义的广义博弈满足定理 2 的条件
- 其中最重要的一步是证明 $\varphi^h(p,(x^h_h)) = B^h(p) \cap M$ 的连续性，这里要用到 $e^h \gg 0$ 这个假设
- 定理 2 保证存在一个 Nash 均衡 $\langle p,(x^h)_h \rangle$
- 余下步骤就是验证 $\langle p,(x^h)_h \rangle$ 是一个竞争均衡

均衡存在性的证明：验证 Nash 均衡是竞争均衡

1. 验证 $\sum_h x^h \leq \sum_h e^h$
2. 验证对于任意 $h \in H$，x^h 在 $B^h(p)$ 上最大化 U^h，而不仅仅在 $B^h(p) \cap M$ 上如此
3. 验证 $p \gg 0$
4. 验证 $p \cdot x^h = p \cdot e^h$ 对任意 $h \in H$ 成立
5. 验证 $\sum_h x^h = \sum_h e^h$

评论：$e^h \gg 0$ 对所有 $h \in H$ 成立是一个非常强的要求；这个条件可以弱化；详见 Dubey and Liu (2017)，3.2 节

生产经济中一般均衡的存在性

定理 4

给定生产经济 $\mathcal{E} = \left((U^h, e^h, \theta^h)_{h\in H}, (Y^j)_{j\in J}\right)$，保持定理 3 的条件不变，并假设 $(Y^j)_{j\in J}$ 满足如下条件：

1. 对任意 $j \in J$，$Y^j \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$
2. 对任意 $j \in J$，Y^j 是闭凸集
3. 对任意 $j \in J$，$Y^j + \mathbb{R}^K_- \subset Y^j$
4. 令 $Y = Y^1 + \cdots + Y^J$，$Y \cap \mathbb{R}^K_+ = \{0\}$
5. $Y \cap (-Y) = \{0\}$

则存在一个竞争均衡

Pareto 最优配置

给定交换经济 $\mathcal{E} = (U^h, e^h)_{h \in H}$

- 称配置 $(x^h)_h \in X^H$ 为可行的，如果 $\sum_h x^h \le \sum_h e^h$
- 给定两个可行配置 $(x^h)_h$ 和 $(y^h)_h$，称 $(x^h)_h$ Pareto 优于 $(y^h)_h$，如果对所有的 $h \in H$ 有 $U^h(x^h) \ge U^h(y^h)$，且对至少一个 h 有 $U^h(x^h) > U^h(y^h)$
- 称 $(x^h)_h$ 为一个 Pareto 最优配置，如果没有其它可行配置 Pareto 优于 $(x^h)_h$

对生产经济 $\mathcal{E} = \left((U^h, e^h, \theta^h)_{h \in H}, (Y^j)_{j \in J}\right)$ 也可以类似的定义 Pareto 最优配置

福利经济学第一定理

- 对给定的交换经济 $\mathcal{E}$，称一个配置 $(x^h)_h$ 为竞争均衡配置 (competitive equilibrium allocation)，若存在 $p \in \Delta$ 使得 $\langle p, (x^h)_h \rangle$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个竞争均衡
- 对生产经济也可类似定义

定理 5 (福利经济学第一定理)

假设家庭偏好均具有单调性，则竞争均衡配置是 Pareto 最优配置

福利经济学第一定理的注记与证明梗概

- 偏好的单调性可以放松为局部非饱和性 (local nonsatiability)，其作用在于说明若 $\bar{x}^h \succsim x^h$ 则 $p \cdot \bar{x}^h \geq p \cdot x^h$，以及若 $\bar{x}^h \succ x^h$ 则 $p \cdot \bar{x}^h > p \cdot x^h$
- 上述偏好的性质又称为显示偏好原理 (revealed preference principle)

交换经济证明梗概.

反证法。假设存在一个可行配置 $(\bar{x}^h)_h$ Pareto 优于竞争均衡配置 $(x^h)_h$，则在均衡价格向量 p 下，对所有 h 有 $p \cdot x^h \leq p \cdot \bar{x}^h$，并对某个 h 有 $p \cdot x^h < p \cdot \bar{x}^h$。对 h 求和知 $p \cdot \sum_h x^h < p \cdot \sum_h \bar{x}^h$。由可行配置定义知 $\sum_h \bar{x}^h \leq \sum_h e^h$，故 $p \cdot \sum_h x^h < p \cdot \sum_h e^h$，与竞争均衡市场出清条件 $\sum_h x^h = \sum_h e^h$ 矛盾。 $\square$

福利经济学第二定理

定理 6 (福利经济学第二定理)

假设家庭偏好均为凸的，则对任一 Pareto 最优配置，均可找到一个价格向量，使得配置与价格向量的组合构成一个竞争性均衡

注 1 偏好的凸性是一个技术性条件，为了便于对商品配置空间中两个不相交的凸集，找出一个分割超平面，进而改造价格向量

注 2 该定理的本质涵义在于竞争性市场效率的完全性：任何计划能够实现的有效配置，通过市场也能实现，这一点在第 5 讲讨论市场的信息效率时，将得到更深刻、完整的体现