

2025 秋季高级宏观经济学 I

第 1 次作业

自愿完成，10.14 可交

1. 考虑如下定义在 $\mathbb{R}_{++}^K$ 上的 CES (constant elasticity of substitution) 函数：

$$U(x) = \left(\alpha_1^{\frac{1}{\varepsilon}} x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \cdots + \alpha_K^{\frac{1}{\varepsilon}} x_K^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad \varepsilon \geq 0, \alpha_1, \dots, \alpha_K > 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_K = 1.$$

解答下列问题。

- (a) 求出下列 ε 极限取值时， $U(x)$ 的函数形式：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} U(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(x), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} U(x).$$

- (b) 以下考虑 $\varepsilon > 0$ 且有限的情形。请证明 $U(x)$ 是一次齐次函数，关于所有 x_k 递增，是凹函数。
- (c) 当 $\varepsilon > 0$ 时，请讨论 $U(x)$ 是否在 0 和 ∞ 满足 Inada 条件。
- (d) 给定 $p \gg 0$ 以及 $w > 0$ ，请求解 Marshall 需求函数 $x(p, w)$ 。
- (e) 请计算 Marshall 需求下商品 k 支出份额 $p_k x_k(p, w)/w$ ，并说明其与 α_k 的关系。
- (f) 请计算 Marshall 需求函数下任意商品 k 与 ℓ 的替代弹性

$$\varepsilon_{k\ell}(p, w) = - \frac{\partial \ln(x_k(p, w)/x_\ell(p, w))}{\partial \ln(p_k/p_\ell)},$$

从而验证 CES 函数得名的原因。

- (g) 在 2-维情形绘制 $\varepsilon \rightarrow 0$ 与 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ 时 $U(x)$ 的无差异曲线，并利用无差异曲线的性质，解释此时 ε 所代表的替代弹性的含义。
- (h) 请计算简介效用函数 $V(p, w) = U(x(p, w))$ 。
- (i) 请证明对任意 k ， $\partial x_k(p, w)/\partial w > 0$ ，即 CES 偏好下，所有商品都是正常品 (normal good)。
- (j) 请证明对任意 k ， $\partial x_k(p, w)/\partial p_k < 0$ ，即 CES 偏好下，所有商品的需求定律 (law of demand) 都成立。
- (k) 请证明对任意 $k \neq \ell$ ，当 $\varepsilon \geq 1$ 时， $\partial x_k(p, w)/\partial p_\ell \geq 0$ ，即 CES 偏好下，所有商品都表现出完全替代性 (gross substitute property)。
2. 假设有两个国家 $i = \{1, 2\}$ 和两种商品 $j = \{1, 2\}$ ， $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ 表示国家 i 的消费组合， $e^i = (e_1^i, e_2^i)$ 表示其商品禀赋向量。国家 1 的代表性消费者效用函数为 CES 形式：

$$U^1(x^1) = \left(\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^1)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^1)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

其中 $\alpha \geq 1/2$ 表示国家 1 代表性消费者更偏好商品 1。类似的，国家 2 的代表性消费者效用函数为：

$$U^2(x^2) = \left((1 - \alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^2)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^2)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

相应的 $\alpha \geq 1/2$ 表示国家 2 代表性消费者更偏好商品 2。两个商品的替代弹性为 $\varepsilon > 0$ 。全世界商品 1 的总禀赋 $e_1^1 + e_1^2 = A > 0$ ，商品 2 的总禀赋 $e_2^1 + e_2^2 = B > 0$ 。

- (a) 假设 $e^1 = (1, 2), e^2 = (2, 1)$ ，请求解竞争性均衡 $\mathcal{E} = \langle (x^{*i})_{i=1,2}, p^* \rangle$ 。
 - (b) 请检验 $x^1 = x^2 = (A/2, B/2)$ 是否是 Pareto 配置。 $x^1 = (A/3, B/3), x^2 = (2A/3, 2B/3)$ 呢？
 - (c) 请在 $A, B > 0$ 的一般情况下，计算确定合约曲线所要满足的方程，即国家 1 消费组合 x_1^1, x_2^1 所应满足的方程，并尝试求解合约曲线的解析表达式。在此情况下，推导尽可能多的合约曲线的性质。
 - (d) 在 $A = B > 0$ 的情况下，化简上问所得合约曲线所满足的方程或解析表达式。此时，合约曲线的形状如何随 $\alpha \in [1/2, 1)$ 的变化而变化？
3. 考虑连续情形的 CES 效用函数。假设存在连续多个商品，由 $i \in [0, 1]$ 表示第 i 个商品，对应的消费记作 $x(i) \geq 0$ ，商品消费组合由函数 $x(\cdot)$ 表示，对应的效用表示为一个积分：

$$U(x(\cdot)) = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}, \quad \varepsilon > 0.$$

- (a) 假设商品 i 的价格 $p(i) > 0$ ，总收入为 $w > 0$ ，请写出如下效用最大化问题的一阶最优条件：

$$\max_{x(\cdot)} \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad \text{s.t.} \quad \int_0^1 p(i)x(i)di \leq w.$$

注意，此问题的 Lagrange 函数如下

$$L = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - \lambda \left(\int_0^1 p(i)x(i)di - w \right).$$

任意 i 对应的消费 $x(i)$ 的 FOC 为 $\partial L / \partial x(i)$ ，直接计算即可。

- (b) 对消费组合 $\{x(i) : i \in [0, 1]\}$ ，定义加总消费为

$$X = \left(\int_0^1 [x(i)]^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} di \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}},$$

亦即将效用值本身视作加总消费水平，并进而定义加总价格水平 $P = w/X$ 。首先证明 (a) 中最优解处的乘子 $\lambda = P$ ，进而证明消费 $x(i)$ 的需求函数可表示为

$$x(i) = \left(\frac{p(i)}{P} \right)^{-\varepsilon} X.$$

- (c) 利用 (b) 中结果，证明

$$P = \left(\int_0^1 [p(i)]^{1-\varepsilon} di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$