经济波动与增长论坛 2022 首届暑期学校

DSGE 模型入门与对数线性化方法

授课人：刘岩

武汉大学经管学院金融系

2022 年 7 月 4 日

本讲内容

本节内容

DSGE 模型的 8 要素

1. 经济参与人：家庭部门，企业，政府
2. 偏好：效用函数，利润 (价值)，社会福利
3. 禀赋和技术：家庭禀赋 (时间、资源)，生产技术，政策操作 (税收、政府消费、货币等)
4. 经济环境：时间 (离散、无穷期)，冲击 (经济的随机状态)
5. 市场商品结构：劳动力，消费品，投资品，资本等
6. 市场竞争结构：完美竞争，垄断竞争，寡头竞争，垄断等
7. 金融市场结构：完全市场，非完全市场
8. 信息结构：经济人在时刻 t 知道什么信息

DSGE 模型的一般含义

DSGE: Dynamic Stochastic General Equilibrium

D 时间是变化的：模型经济动态发展，经济人动态决策

S 状态是随机的：模型经济环境是不确定的 $\Rightarrow$ 通常假定模型经济环境的变化满足给定的随机过程，且经济人知道这一过程的概率性质——随机冲击序列 $\{s^t = (s_0, s_1, \ldots, s_t) : t = 0, 1, \ldots, \infty\}$ 构成了模型经济的时间-事件树 (time-event tree)，即概率空间的系列事件域 (σ-域) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

G 市场结构具有一般性：不一定是完全市场、完美竞争；多种商品

E 经济人各自的约束条件下做出最优选择，通过**价格**机制实现所有商品出清——包含对未来价格的<u>预期</u>：**理性预期**，所有决策者对未来的预期与未来的经济均衡一致

现代宏观经济学中的 DSGE 模型

常用的 DSGE 模型具有如下特征

- 家庭和厂商具有同质性：个人决策与加总决策相同，可以直接加总——代表性经济人 (representative agent)
- 无穷多个家庭和厂商：单个决策者无限“小”，对均衡价格无影响，即决策者为价格接受者 (price taker)
  - 另一个类常见市场结构为垄断竞争 (monopolistic competition)：无穷多个厂商，但每个厂商在自己的产品领域都是垄断者，此时厂商具有定价 (pricing) 能力
- 时间无穷，决策者问题具有递归性 (recursive)：t 期问题与 $t+1$ 期具有完全一致的形式
- 冲击为 Markov 过程：随机环境具有递归性和平稳性 (stationary)
- 金融市场完全：有足够多状态依赖 (state-contingent) 证券，经济人跨期配置不受限制

DSGE 模型递归结构的意义

- 递归性和平稳性保证决策人的动态最优化问题的最优解具有简单的结构：t 期选择变量 (choice variable) 是状态变量 (state variable) 的时不变函数 (time invariant function)
- 进一步的，如果均衡价格能够表示为经济加总量的函数，那么整个动态均衡也具有递归结构，此时的均衡称为**递归均衡** (recursive equilibrium)
- 本质上，具有递归结构的动态最优化问题可以写成动态规划 (dynamic programming) 的形式，从而 (至少) 可以使用动态规划的方法求得数值解，并进一步求出递归均衡的数值解

DSGE 模型的递归结构：家庭问题

暂时忽略政府，只考虑家庭和厂商

- 变量区分：外生随机状态变量 Z_t，服从一个 Markov 过程；内生状态变量 X_t，即前定 (predetermined) 变量，在 $t-1$ 期决定；内生选择变量 Y_t；内生均衡变量 P_t
- Z_t, X_t, Y_t, P_t 都看做 (列) 向量
- 代表性家庭最大化终身效用：

$$\max \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(X_t, Y_t) \quad \text{s.t. } (Y_t, X_{t+1}) \in \Gamma(X_t, Z_t; P_t),$$

给定 X_0, Z_0；$\Gamma(X_t, Z_t; P_t)$ 是家庭的约束对应 (constraint correspondence)

家庭问题的递归形式

- 家庭的动态最优化问题可以写作如下递归形式：

$$U(X_t, Z_t) = \max_{Y_t, X_{t+1}} u(X_t, Y_t) + \beta \mathbb{E}_{Z_{t+1}|Z_t} U(X_{t+1}, Z_{t+1})$$

$$\text{s.t. } (Y_t, X_{t+1}) \in \Gamma^h(X_t, Z_t; P_t).$$

- 假设内生均衡变量 P_t 也是状态变量的时不变函数 $P_t = H(X_t, Z_t)$，则该动态规划问题的解可以写为 $(Y_t, X_{t+1}) = G^h(X_t, Z_t)$

厂商问题的递归形式

- 厂商的折现利润最大化问题：

$$\max \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} Q_{0,t} v(X_t, Y_t) \quad \text{s.t. } (Y_t, X_{t+1}) \in \Gamma^f(X_t, Z_t; P_t),$$

给定 X_0, Z_0；$\Gamma^f(X_t, Z_t; P_t)$ 是企业的约束对应

- $Q_{0,t} = Q_{0,1}Q_{0,2}\cdots Q_{t-1,t}$ 表示经济中的随机折现因子，亦称为定价核 (pricing kernel)：未来每个时期、每个状态下一单位消费在 $t=0$ 初始状态下的价格
  - $Q_{t,t+1}$ 一般是状态变量 $(X_t, Z_t, X_{t+1}, Z_{t+1})$ 的函数
- 厂商问题的递归形式：

$$V(X_t, Z_t) = \max_{Y_t, X_{t+1}} v(X_t, Y_t) + \mathbb{E}_{Z_{t+1}|Z_t} Q_{t,t+1} V(X_{t+1}, Z_{t+1})$$
$$\text{s.t. } (Y_t, X_{t+1}) \in \Gamma^f(X_t, Z_t; P_t).$$

递归均衡

- 给定价格函数 $P_t = H(X_t, Z_t)$，企业问题的解可写为 $(Y_t, X_{t+1}) = G^f(X_t, Z_t)$ 的形式
- 递归均衡就是一组函数 G^h, G^f, H 满足：(i). 给定价格下家庭和厂商的最优化条件；(ii). 给定 t 时的状态 X_t, Z_t，价格函数决定的价格向量 $P_t = H(X_t, Z_t)$ 保证市场出清，即 G^h 和 G^f 的相关分量满足一致性：若

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^h(X_t, Z_t) \\ G_2^h(X_t, Z_t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Y_t \\ X_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^f(X_t, Z_t) \\ G_2^f(X_t, Z_t) \end{bmatrix},$$

则 $G_1^h = G_1^f$，$G_2^h = G_2^f \equiv G^X$

DSGE 模型的求解

- 当 DSGE 模型满足递归条件时，可以使用动态规划的方法对完整的非线性模型的**均衡**进行求解
- 通常而言解析解是不存在，因此需要借助数值动态规划的方法求得数值解
- 但对于一大类 DSGE 模型而言，可以利用模型所具有的确定性稳态 (deterministic steady state) 性质，通过在稳态附近对模型一阶条件进行对数线性化 (log-linearization)，最终获得一个理性预期线性差分方程组
- 通过求解该方程，最终得到对非线性递归均衡函数的线性逼近

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：1

列出模型中所有决策者动态最优化问题的一阶条件、预算约束和市场出清条件，统称为 一阶条件；这组非线性一阶条件可以写成一个方程组：

$$\Psi(\mathbb{E}_t Y_{t+1}, \mathbb{E}_t P_{t+1}, X_{t+1}, Z_{t+1}, Y_t, P_t, X_t, Z_t) = \mathbf{0}_{n\times 1}$$

$n = n_Y + n_P + n_X + n_Z$ 为变量个数 Ψ 称为模型的结构方程 (structural equations)

- 由于 Z_t 为外生冲击，Ψ 中有 n_Z 个方程只与 Z_t 有关，决定 Z_t 的随机演化规律
- 其余 $n_E = n_Y + n_P + n_X$ 个方程决定了 n_E 个内生变量及其动态性质
- Ψ 的具体形式由模型的结构参数 (structural parameters) θ 决定：$\Psi(\cdot;\theta) = \mathbf{0}$.

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：2

确定模型的稳态：假设 $Z_t = Z_{t+1} = \bar{Z} \equiv \mathbb{E}Z_t$ 无随机波动，并假定 $Y_{t+1} = Y_t = \bar{Y}$，$P_{t+1} = P_t = \bar{P}$，$X_{t+1} = X_t = \bar{X}$，即内生变量不随时间变化，则可得 n_E 个方程：

$$\bar{\Psi}(\bar{Y}, \bar{P}, \bar{X}) = \mathbf{0}_{n_E \times 1}.$$

通过这 n_E 个方程把 n_E 个稳态未知量 $\bar{Y}, \bar{P}, \bar{X}$ 求解出来

- 一般而言，这个 n_E 个非线性方程无法求出解析解，需要使用数值方法
- 但 n_E 个方程通常可以简化为较少个数的非线性方程组，再进行数值求解比较简单、精确
- 良好的模型设定可以保证稳态时唯一的或是局部唯一的

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：3

对结构方程 $\Psi(\cdot) = 0$ 中的所有变量围绕稳态做对数线性化

- 假设 X 为任一变量，$\bar{X}$ 为其稳态值，$F(X)$ 为一个光滑函数；由 $X = e^{\log X}$ 知 $F(X) = F(e^{\log X})$
- 对 $F(X)$ 做对数线性化逼近，即对 $f(\log X) = F(e^{\log X})$ 做关于 $\log X$ 的线性逼近；围绕稳态 $\bar{X}$ 的逼近，即围绕 $\log \bar{X}$ 的逼近：

$$f(\log X) \approx f(\log \bar{X}) + f'(\log \bar{X})(\log X - \log \bar{X}).$$

由 $f'(\log X) = F'(e^{\log X})e^{\log X} = F'(X)X$ 知：

$$F(X) = F(\bar{X}) + F'(\bar{X})\bar{X}(\log X - \log \bar{X}).$$

- 对 $\Psi(\cdot)$ 中所有变量都进行对数线性化

对数线性化的进一步注明

- 对数线性化的含义：通常默认 DSGE 模型均衡时各变量围绕其稳态值随机波动，故可认为 $X \sim \bar{X}$，即 $X - \bar{X}$ 较小；此时有

$$\log X - \log \bar{X} = \log(X/\bar{X}) = \log\left(1 + \frac{X - \bar{X}}{\bar{X}}\right) \approx \frac{X - \bar{X}}{\bar{X}}.$$

- 定义 $x = \log(X/\bar{X})$，则 x 可以理解为变量 X 关于其稳态值的百分比偏离 (percentage deviation)
- 将线性化模型变量写成 x 的形式，则 $\Psi(\cdot)$ 导出的线性动态系统可以看做均衡时变量关于稳态百分比偏离的动态系统
- 当变量函数带有期望时，如 $\mathbb{E}F(X)$，先对 F 对数线性化再取期望：

$$\mathbb{E}F(X) \approx F(\bar{X}) + F'(\bar{X})\bar{X}\mathbb{E}x.$$

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：4

为简化，把变量分为两组：$W_t = (Y_t, P_t), S_t = (X_t, Z_t)$，即 Ψ 中依赖于预期的内生变量和前定变量及外生变量

- 对 $\Psi(\mathbb{E}_t W_{t+1}, S_{t+1}, W_t, S_t)$ 的对数线性化可以写为

$$\Psi(\mathbb{E}_t W_{t+1}, S_{t+1}, W_t, S_t) = \underbrace{\Psi(\bar{W}, \bar{S}, \bar{W}, \bar{S})}_{=0} + J(\Psi)|_{\bar{W},\bar{S}}\xi,$$

  $J(\Psi)$ 表示 Ψ 的 Jacobi 矩阵，用 $\odot$ 表示两个同样长度向量对应元素乘积所得的向量，则

$$\xi = \begin{bmatrix} \bar{W} \odot \mathbb{E}_t w_{t+1} \\ \bar{S} \odot s_{t+1} \\ \bar{W} \odot w_t \\ \bar{S} \odot s_t \end{bmatrix}$$

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：5

- 对数线性化后的结构方程可写为 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$，其中

$$\boldsymbol{J} = J(\Psi)|_{\bar{W},\bar{S}} \cdot \operatorname{diag}\left[\bar{W}^{\mathsf{T}}, \bar{S}^{\mathsf{T}}, \bar{W}^{\mathsf{T}}, \bar{S}^{\mathsf{T}}\right]$$

  表示经过稳态调整的结构方程 Jacobi 矩阵，而

$$\boldsymbol{\zeta} = \left[\mathbb{E}_t w_{t+1}^{\mathsf{T}}, s_{t+1}^{\mathsf{T}}, w_t^{\mathsf{T}}, s_t^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$$

  表示对数线性化变量 (列) 向量
- $\boldsymbol{\zeta}$ 有预期项 $\mathbb{E}_t w_{t+1}$，故 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ 为一个 <u>理性预期差分方程</u>；模型的均衡对应着该方程的解
- 一般而言，$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ 还不能直接解出内生变量的均衡动态表达式，需要对该方程进一步调整、化简

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：6

- 文献中有多种调整方式，常见的有 Blanchard & Kahn (1980 ECTA)，Sims (2001 Compu. Econ.)；Anderson (2008 Compu. Econ.) 有一个系统总结
- Sims 的方法核心是把 $J\zeta = \mathbf{0}$ 化简为如下形式：

$$\Phi_1 \begin{bmatrix} \mathbb{E}_t w_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \Phi_0 \begin{bmatrix} w_t \\ x_t \end{bmatrix} + \Xi \begin{bmatrix} z_{t+1} \\ z_t \end{bmatrix}.$$

- BK 方法的核心是把 $J\zeta = \mathbf{0}$ 化简为如下形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_t w_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} w_t \\ s_t \end{bmatrix} + \Xi \epsilon_t,$$

ϵ_t 是外生变量 z_t 对应的随机冲击向量

两类方法的对比

- 当待解的均衡唯一时，BK 方法和 Sims 方法是等价的；Sims 方法能够处理的问题比 BK 方法涵盖范围更广
- 但 BK 方法更直观，只需要使用特征值分解，而 Sims 方法需要使用 QZ 分解
- 此外，BK 方法更突出线性化理性预期均衡的一般结构：BK 方法的解可以写为

$$s_{t+1} = \boldsymbol{F} s_t + \boldsymbol{H} \epsilon_t, \qquad w_t = \boldsymbol{G} s_t.$$

  前者表示状态变量的 (内生) 动态过程，后者表示内生选择变量和均衡变量由状态变量决定
- 对简单模型进行理论分析时，通常想办法把线性化模型写成 BK 形式，再用 BK 方法求解

BK 方法说明

- BK 方法的原理是判断 $n \times n$ 系数矩阵 Φ 的特征值 性质
- 假设 Φ 的 n 个特征值 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 互不相同，且按 (复数) 模长大小排列 $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ 此外，向量 w_t (预期变量) 的长度为 k，s_t 长度为 $n-k$
- BK 证明：若 $|\lambda_i| > 1$ 对 $i = 1, \ldots, k$ 成立，而 $|\lambda_i| < 1$ 对 $i = k+1, \ldots, n$ 成立，则理性预期差分方程

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_t w_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} w_t \\ s_t \end{bmatrix} + \Xi \epsilon_t$$

具有唯一稳定解 $s_{t+1} = \boldsymbol{F} s_t + \boldsymbol{H} \epsilon_t, w_t = \boldsymbol{G} s_t$ 其中 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ 均为 $\boldsymbol{J}$ 决定，根源上都是模型结构参数的函数

DSGE 模型均衡对数线性化求解的一般步骤：7

对数线性化 DSGE 模型均衡求解

- 一般情况下，理性预期差分方程 $J\zeta = \mathbf{0}$ 的解，意为把内生变量 $(w_t, x_t)^\intercal$ 表示为外生变量 z_t 及其过去值 z_{t-j} 的线性函数
- 模型的均衡即对应方程的解：外生变量到内生变量的映射
- 很多情况下 $J\zeta = \mathbf{0}$ 的解不唯一，故模型的均衡不唯一
- 此外，该方程的解可能也不稳定：随时间推移，内生变量可能无限远离稳态值，$(w_t, x_t) \to \infty$
- BK 方法明确给出了存在唯一稳定解的充分条件：称为鞍点路径稳定性 (saddle-path stability)；Sims 方法本质上具有同样特征，但没有 BK 方法直观

BK 方法示例：单变量的情形

- $\mathbb{E}_t x_{t+1} = \lambda x_t + a_t$，$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$，$|\rho| \leq 1$，$\varepsilon_t \sim \text{iid}$ 将该式写为 $x_t = \lambda^{-1}(\mathbb{E}_t x_{t+1} - a_t)$；由全期望公式 $\mathbb{E}_t \mathbb{E}_{t+\tau} y = \mathbb{E}_t y$ 可得

$$
\begin{aligned}
x_t &= -\lambda^{-1} a_t + \lambda^{-1}\lambda^{-1}(\mathbb{E}_t x_{t+2} - \mathbb{E}_t a_{t+1}) = \cdots \\
&= -\lambda^{-1} \sum_{j \geq 0} \lambda^{-j} \mathbb{E}_t a_{t+j} + \lim_{j \to \infty} \lambda^{-j} \mathbb{E}_t x_{t+j}.
\end{aligned}
$$

- 稳定解要求 $\lim_j |\mathbb{E}_t x_{t+j}| / \gamma^j$ 有界对某个 $\gamma > 1$ 成立，故当且仅当 $|\lambda| > 1$ 时，上述方程有解 $x_t = -\lambda^{-1} \sum_{j \geq 0} \lambda^{-j} \mathbb{E}_t a_{t+j}$；由 $\mathbb{E}_t a_{t+j} = \rho^j a_t$，可得

$$
x_t = -\frac{a_t}{\lambda - \rho}.
$$

本节内容

2. RBC 模型
   - 基本模型设定
   - 模型的一阶条件
   - 模型的稳态
   - 模型求解

RBC 模型的背景

- 实际商业周期 (real business cycle, RBC) 模型是第一个 (代) DSGE 模型
- RBC 模型最早由 Kydland & Prescott (1982, ECTA) 提出，用以量化解释主要宏观加总变量的周期性波动的根源和特征：产出，消费，投资，劳动
    - 四个主要变量各自的波动率 及自相关性，以及后三个变量与产出之间的相关性
- 唯一的外生变量：全要素生产率 (TFP)
- 对 RBC 模型参数进行适当校准 (calibration) 并使用估计所得的 TFP 过程，KP 发现该模型可以“成功”解释四个变量“大部分”的周期波动特征
- 因为模型中没有任何的货币变量，故称其为“实际”

基准 RBC 模型设定

- 消费者 (动态) 问题：

$$\max_{\{C_t, N_t, I_t\}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, 1 - N_t)$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + I_t \le w_t N_t + r_t K_t + \pi_t, \quad K_{t+1} = I_t + (1-\delta) K_t, \quad K_0 \text{ 给定}.$$

时间禀赋单位化为 1：$L_t = 1 - N_t$ 为闲暇时间

- 厂商 (静态) 问题：

$$\max_{K_t, N_t} \pi_t \equiv A_t F(K_t, N_t) - w_t N_t - r_t K_t,$$

$F(K, L)$ 满足常规模报酬，A_t 是随机生产率冲击，满足
$\log A_t = (1-\rho) \log \bar{A} + \rho \log A_{t-1} + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \sim \text{iid}$

一阶条件

- 消费者动态最优化问题一阶条件：预算约束 +

$$
\begin{aligned}
\text{跨期替代：} \quad & U_C(C_t, L_t) = \beta \mathbb{E}_t[U_C(C_{t+1}, L_{t+1})(1-\delta+r_{t+1})], \\
\text{期内替代：} \quad & U_L(C_t, L_t) = U_C(C_t, L_t) w_t, \\
\text{横截条件：} \quad & \lim_{T\to\infty} \beta^{T-t} \mathbb{E}_t U_C(C_T, L_T) K_{T+1} = 0.
\end{aligned}
$$

- 横截条件 (transversality condition, TVC)：无穷远处，最优储蓄 (资本) 选择的边际折现价值等于 0 $\Rightarrow$ 最优储蓄选择不会无穷增长，与其让无穷远处的储蓄在当前还有边际价值，不如将这部分价值 (资源) 转移到现在进行消费
- 厂商一阶条件：$w_t = A_t F_N(K_t, N_t)$，$r_t = A_t F_K(K_t, N_t)$，且 $\pi_t = 0$，$A_t F(K_t, N_t) = w_t N_t + r_t K_t$
- 市场出清：$C_t + K_{t+1} = A_t F(K_t, N_t) + (1-\delta) K_t$

归并的一阶条件和稳态

- 一阶条件可归并为：

$$
\begin{aligned}
U_C(C_t, L_t) &= \beta \mathbb{E}_t[U_C(C_{t+1}, L_{t+1})(1-\delta + A_{t+1}F_K(K_{t+1}, N_{t+1})], \\
U_L(C_t, L_t) &= U_C(C_t, L_t)A_t F_N(K_t, N_t), \\
C_t + K_{t+1} &= A_t F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t.
\end{aligned}
$$

- 注意：所有相对价格变量都被资源配置变量替换掉了
- 通常将横截条件忽略掉，原因在于我们只考虑有界 (bounded) 均衡，此时 TVC 自动满足；但在更复杂的模型中，TVC 可能无法忽略，特别是做理论定性分析

模型的稳态

- 确定性稳态：$A_t = \bar{A}$，所有内生变量都为常数，满足条件

$$1-\delta+\bar{A}F_K(\bar{K},\bar{N}) = 1/\beta,$$
$$U_L(\bar{C},1-\bar{N})/U_C(\bar{C},1-\bar{N}) = \bar{A}F_N(\bar{K},\bar{N}),$$
$$\bar{C}+\delta\bar{K} = \bar{A}F(\bar{K},\bar{N}).$$

  三个未知数三个方程，进而可解得 $\bar{C},\bar{L},\bar{K}$

- 稳态是否唯一是很重要的性质；通常而言，简单的 RBC 都有唯一稳态，但增加各类摩擦之后，稳态未必唯一
- 不同稳态对应的均衡动态性质可能有很大差别

对数线性化

- 对归并的三个一阶条件中的所有变量 (C_t, N_t, K_t, A_t) 进行对数线性化，以稳态为基准，可得到

$$J\zeta = \mathbf{0},$$

其中 $\zeta = [\mathbb{E}_t c_{t+1}, \mathbb{E}_t n_{t+1}, k_{t+1}, a_{t+1}, c_t, n_t, k_t, a_t, \varepsilon_{t+1}]^\top$.

- 可以把 $n_t = \log(N_t/\bar{N})$ 替换掉，得到关于 c_t, k_t, a_t 的一个理性预期差分方程组：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_t c_{t+1} \\ k_{t+1} \\ a_{t+1} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} c_t \\ k_t \\ a_t \end{bmatrix} + \Xi \varepsilon_{t+1}.$$

该方程组具有 BK 形式

模型均衡的效率 (efficiency) 性质

- RBC 基本模型的一个特点：其竞争均衡配置 $\{C_t, K_{t+1}, N_t\}$ 与是 Pareto 最优的；因此，对均衡配置的求解等价于社会计划者 (social planner) 在给定偏好、技术和资源约束情况下对社会效用最大化问题的求解
- 均衡价格 r_t, w_t 可以直接写为均衡配置 K_t, N_t 的函数：

$$r_t = A_t F_K(K_t, N_t), \qquad w_t = A_t F_N(K_t, N_t).$$

- **注意**：RBC 模型均衡的 Pareto 最优性质是特例，成立的原因在于 RBC 模型中没有假设任何形式的摩擦 (friction)/扭曲 (distortion)：相对价格 $\Leftrightarrow$ 边际生产率 $\Leftrightarrow$ 边际替代率
- 更现实的模型包括各种摩擦：税收，不完全 (金融) 市场，不对称信息，名义粘性，……

社会计划者问题：最优增长模型

- RBC 基准模型中，家庭部门的收入，可以由厂商部门的生产函数直接替代 $w_t N_t + r_t K_t + \pi_t = A_t F(K_t, N_t)$
- 此时家庭部门的预算约束为

$$C_t + I_t = C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t \le A_t F(K_t, N_t).$$

- 社会计划者的目标函数与家庭部门一致，因此其最优化问题可直接写为：

$$\max_{\{C_t, N_t, I_t\}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, 1-N_t)$$

$$\text{s.t. } C_t + I_t \le A_t F(K_t, N_t),\ K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t,\ K_0 \text{ 给定}.$$

- 这就是著名的 Cass-Koopmans 模型，又称单一部门最优增长模型

RBC 模型的非线性求解

- 社会计划者最优化问题有一个直接的递归形式：

$$
\begin{aligned}
V(K, A) = \max_{C,K',N} & \; U(C, 1-N) + \beta \mathbb{E}_{A'|A} V(K', A') \\
\text{s.t. } & C + K' - (1-\delta)K \le AF(K, N), \\
& \log A' = (1-\rho)\log \bar{A} + \rho \log A + \varepsilon'.
\end{aligned}
$$

  上式中不带 $'$ 的变量表示当期变量，带 $'$ 变量表示下一期变量；A 为外生状态变量，K 为内生状态变量，C, K', N 为当期选择变量对应的 $r = AF_K(K, N)$，$w = AF_N(K, N)$

- 该递归问题可用数值随机动态规划 (stochastic dynamic programming) 方法来进行求解：如值函数迭代法，决策函数迭代法，投影法，参数预期法，等等

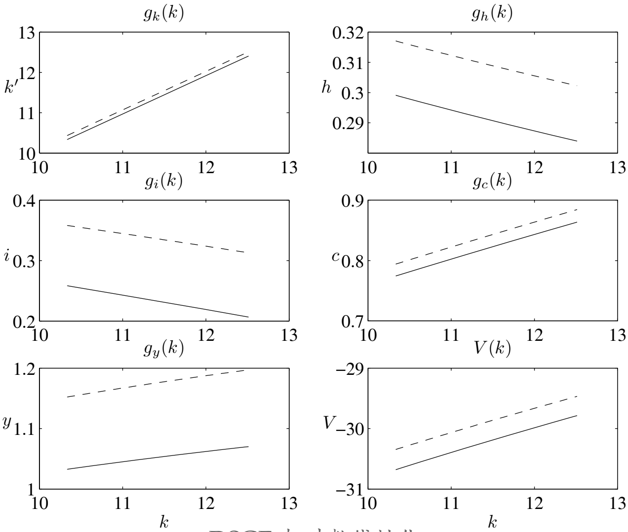
RBC 模型非线性解的性质

- 用动态规划方法求得解具有如下形式：

$$C = G^C(K, A), \quad , N = G^N(K, A), \quad , K' = G^K(K, A).$$

- G^K 决定了内生状态转移，加上生产率转移方程 $A' = \bar{A}^{1-\rho} A^{\rho} \exp^{\varepsilon'}$，可以从任何初始状态 (K_0, A_0) 出发对模型均衡进行随机模拟
- 非线性模型均衡的状态变量 (K, A) 可以看做一个 2-维的非线性 Markov 过程；整个均衡具有一个非线性状态-空间 (state-space) 表示
- 对数线性化解可看做是对非线性状态-空间表示的线性近似

RBC 模型非线性解示例：虚线表示 $A_{\max}$，实线表示 $A_{\min}$，h 表示劳动



本节内容

3. RBC 模型的对数线性化：基准情形
   - 效用函数和消费者问题
   - 生产函数和变量内涵
   - 对数线性化
   - 基准模型解的性质

效用函数参数化

- Kydland-Prescott 最早使用了如下类型的 CRRA 效用函数：

$$U(C,L)=\begin{cases}\frac{\left(C^{\phi}L^{1-\phi}\right)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma\neq 1,\\ \phi\log C+(1-\phi)\log L, & \sigma=1.\end{cases}$$

  $\sigma\geq 0$ 表示相对风险厌恶系数；$0<\phi<1$，$C^{\phi}L^{1-\phi}$ 可以理解为消费品和闲暇时间“生产”出的最终消费，ϕ 对应消费品和闲暇的支出份额 (Cobb-Douglas 函数的性质)

- σ 更重要的意义在于决定了跨期消费替代弹性 (intertemporal elasticity of substitution in consumption)
- U 严格凹且满足 Inada 条件：$U_C,U_L\rightarrow\infty, C,L\downarrow 0$，故均衡时必有 $C_t>0$，$L_t>0$，即 $N_t<1$

跨期替代弹性

- 考虑确定性条件下效用最大化问题：

$$\sum_t \beta^t U(C_t) \quad \text{s.t.} \quad C_t + A_{t+1} \leq (1 + r_t)A_t.$$

- CRRA 效用下，Euler 方程为：

$$U'(C_t) = \beta U'(C_{t+1})(1 + r_{t+1}) \Rightarrow C_t^{-\sigma} = \beta C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t).$$

- 对数线性化可得 ($\hat{r}_t = \log(1 + r_t) - \log(1 + \bar{r})$，并注意 $1 + \bar{r} = \beta^{-1}$)：

$$c_t = c_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\hat{r}_{t+1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}c_t}{\mathrm{d}\hat{r}_{t+1}} = -\frac{1}{\sigma}$$

资产收益率 r_{t+1} 上升 1%，C_t 下降 $\frac{1}{\sigma}$%

log-log 情形

- $\sigma = 1$ 是常用的基准情形：

$$\mathbb{E}_0 \sum_t \beta^t U(C_t, 1 - N_t) = \mathbb{E}_0 \sum_t \beta^t [\phi \log C_t + (1 - \phi) \log(1 - N_t)]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}_0 \sum_t \beta^t \left[\log C_t + \underbrace{\tfrac{1-\phi}{\phi}}_{\equiv \gamma > 0} \log(1 - N_t) \right].$$

- 给定预算约束 $C_t + K_{t+1} \le w_t N_t + (1 - \delta + r_t) K_t$，$\Lambda_t$ 为 t 期约束的 Lagrangian 乘子，则 FOC 为：

$$\Lambda_t = \beta \mathbb{E}_t [\Lambda_{t+1}(1 - \delta + r_{t+1})], \quad \Lambda_t = C_t^{-1}, \quad w_t \Lambda_t = \gamma (1 - N_t)^{-1}$$

Λ_t：财富效应(wealth effect)，一单位额外收入的边际效用

消费者一阶条件的稳态

- 稳态时，$\Lambda_t = \bar{\Lambda}, C_t = \bar{C}, N_t = \bar{N}, r_t = \bar{r}, w_t = \bar{w}$
- 一阶条件满足：

$$\bar{\Lambda} = \beta[\bar{\Lambda}(1-\delta+\bar{r})], \quad \bar{\Lambda} = \bar{C}^{-1}, \quad \bar{w}\bar{\Lambda} = \gamma(1-\bar{N})^{-1}$$

其中第一个方程意味着：

$$\beta(1-\delta+\bar{r}) = 1 \Rightarrow \underbrace{1-\delta+\bar{r}}_{\text{总资本回报率}} = 1-\delta+\underbrace{(1-\alpha)\frac{Y}{K}}_{\text{利用 CD 生产函数}} = \frac{1}{\beta}$$

上式是宏观资产定价的基础：资本回报率等于主观时间折现率 $\Rightarrow$ 宏观结构模型校准的基础 $\Rightarrow$ 中国的数据与此不一致 $\Rightarrow$ 中国经济并不处于稳态

消费者一阶条件的对数线性化

- $\hat{r}_t, \hat{w}_t$ 表示 r_t, w_t 关于稳态的对数偏离；x_t 表示其他变量的对数偏离
- 一阶条件的对数线性化：

$$\lambda_t = \mathbb{E}_t \lambda_{t+1} + \overbrace{[1-\beta(1-\delta)]}^{\equiv \beta\bar{r}<1} \mathbb{E}\hat{r}_{t+1},$$

$$\lambda_t = -c_t,$$

$$\hat{w}_t + \lambda_t = \frac{\bar{N}}{1-\bar{N}} n_t.$$

财富效应意味着 $c_t = -\lambda_t$，λ_t 减小 (Λ_t 相对 $\bar{\Lambda}$ 减小) 对应着消费增加

对数线性化一阶条件的意义

- 前页前两式联立可得：

$$c_t = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_t c_T - \sum_{j=1}^{\infty} (\beta \bar{r})^j \mathbb{E}_t \hat{r}_{t+j}.$$

  当期消费由“长期”消费预期 (反映“长期”收入) 和资本回报率 (实际利率) 的预期决定：持久收入假说

- 前页第 3 式可写为：

$$n_t = \frac{1-\bar{N}}{\bar{N}} (\hat{w}_t + \lambda_t),$$

  故消费者劳动供给弹性为 $(1-\bar{N})/\bar{N}$

- 当 $\sigma \neq 1$ 时，上面的推导如何变化？

生产函数参数化

- 生产函数通常假设为一阶其次 (均衡利润为 0)；最常用的函数形式为 Cobb-Douglas 型：
$$Y = AF(K,N) = AK^{1-\alpha}N^{\alpha},$$
α 为劳动收入份额，A 为 Hicks 中性生产率 (全要素生产率)F 严格凹且满足 Inada 条件：$F_K, F_L \to \infty, K, L \downarrow 0$
- 若 r 为资本租赁收益率，w 为工资率，则企业利润最大化问题为：
$$\max_{K,N} AK^{1-\alpha}N^{\alpha} - rK - wN$$
$$\overset{\text{FOC}}{\Longrightarrow} r = (1-\alpha)AK^{-\alpha}N^{\alpha}, \quad w = \alpha AK^{1-\alpha}N^{\alpha-1}.$$
故劳动收入 (支出) 占产出份额为 $wN/Y = \alpha$

生产函数对数线性化

- Cobb-Douglas 生产函数可以直接进行对数线性化：

$$y_t = a_t + (1-\alpha)k_t + \alpha n_t,$$

其中 $a_t = \log(A_t/\bar{A})$，故 $a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$

- 类似的，$\hat{r}_t, \hat{w}_t$ 可写为

$$\hat{r}_t = a_t - (1-\alpha)k_t + (1-\alpha)n_t,$$
$$\hat{w}_t = a_t + \alpha k_t - \alpha n_t.$$

前式说明资本需求是实际利率的减函数，后式说明劳动需求是工资率的减函数

全要素生产率

- 全要素生产率 $A = Y/F(K,N)$，理论上可以计算其水平值；但与劳动生产率 (单位劳动时间的产出价值) 不同，A 的含义不明：N 的单位是时间，时间的 α 次方是什么？
- A 关于时间的变动是可以理解的：假设一段时间内 K 和 N 翻倍，而 Y 也翻倍，那么 A 没有变化
  - 恰当测量 Y, K：以价值为单位，但直接测量的是名义值
- $\log A_t = \log Y_t - (1-\alpha)\log K_t - \alpha \log N_t$，则 A 的增长率：

$$
\begin{aligned}
g_A &\approx \log A_t - \log A_{t-1} = \Delta \log A_t \\
&= \Delta \log Y_t - (1-\alpha)\Delta \log K_t - \alpha \Delta \log N_t \\
&= g_Y - (1-\alpha) g_K - \alpha g_N.
\end{aligned}
$$

资本积累

- 资本积累方程为 $K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$，$\delta$ 为资本折旧率
- 稳态时，$\bar{K} = \bar{I} + (1-\delta)\bar{K} \Rightarrow \bar{I} = \delta\bar{K}$：永续折现法
- 该式表明，投资 I_t 按 1–1 转化为下期资本存量两种解释：资本品生产率为 1，或资本品与投资品相对价格为 1
- 由生产函数规模报酬不变，消费预算约束可写为

$$C_t + I_t = Y_t = AF(K_t, N_t).$$

  上式表明，投资品与消费品的相对价格为 1 更简单的解释：该经济中只有一个商品，即最终消费品 Y_t，即可用于消费，也可用于投资并按 1–1 比例转化为资本存量
- RBC 模型的核心是单一部门 (商品) 增长模型

对数线性化方程组

- 模型一阶条件的对数线性化方程组为：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_t c_{t+1} - \beta\bar{r}\mathbb{E}_t\hat{r}_{t+1} &= c_t, \\
n_t &= \frac{1-\bar{N}}{\bar{N}}(\hat{w}_t - c_t), \\
\hat{r}_t &= a_t - (1-\alpha)(k_t - n_t), \\
\hat{w}_t &= a_t + \alpha(k_t - n_t), \\
\varphi_i i_t &= \varphi_k[k_{t+1} - (1-\delta)k_t], \\
\varphi_c c_t + \varphi_i i_t &= a_t + (1-\alpha)k_t + \alpha n_t, \\
a_{t+1} &= \rho a_t + \varepsilon_{t+1}.
\end{aligned}
$$

$\varphi_c = \bar{C}/\bar{Y}, \varphi_i = \bar{I}/\bar{Y}, \varphi_k = \bar{K}/\bar{Y}$ 表示稳态比值

- 7 个变量，7 个方程

一阶条件的化简

- 令 $\eta = \frac{1-\bar{N}}{\bar{N}} > 0$，$n_t, w_t$ 两式联立得:

$$n_t = -\frac{\eta}{1+\alpha\eta}c_t + \frac{\alpha\eta}{1+\alpha\eta}k_t + \frac{\eta}{1+\alpha\eta}a_t.$$

- 利用上式 $\hat{r}_t$ 可写为：$\hat{r}_t = -\frac{(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta}c_t - \frac{1-\alpha}{1+\alpha\eta}k_t + \frac{1+\eta}{1+\alpha\eta}a_t$
- 替换 Euler 方程中的 $\mathbb{E}_t\hat{r}_{t+1}$ 可得:

$$\left[1 + \frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta}\right]\mathbb{E}_t c_{t+1} + \frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)}{1+\alpha\eta}k_{t+1} = c_t + \frac{\beta\bar{r}\rho(1+\eta)}{1+\alpha\eta}a_t.$$

- 由预算约束和资本积累方程联立并替换 n_t 可得:

$$k_{t+1} = -\left[\frac{\varphi_c}{\varphi_k} + \frac{\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}\right]c_t + \left[1-\delta + \frac{1+\alpha\eta-\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}\right]k_t + \frac{1+2\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}a_t.$$

log-log 情形 RBC 模型的约化形式

- 令 $s_t = [k_t, a_t]^\intercal$，对数线性化一阶条件可写为如下形式：

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\mathbb{E}_t c_{t+1}\\ s_{t+1}\end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}c_t\\ s_t\end{bmatrix} + \boldsymbol{C}\varepsilon_{t+1},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1+\frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} & \frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)}{1+\alpha\eta} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\frac{\beta\bar{r}\rho(1+\eta)}{1+\alpha\eta}}{}\\ -\frac{\varphi_c}{\varphi_k} - \frac{\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} & 1-\delta+\frac{1+\alpha\eta-\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} & \frac{1+2\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}\\ 0 & 0 & \rho\end{bmatrix}.$$

log-log 情形 RBC 模型的 BK 形式

- 令 $\Phi = A^{-1}B, \Xi = A^{-1}C = [0,0,1]^\mathsf{T}$，则可得如下 BK 形式的线性理性预期差分方程：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_t c_{t+1} \\ s_{t+1} \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} c_t \\ s_t \end{bmatrix} + \Xi \varepsilon_{t+1}$$

- **注意**：由 $\frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)\eta}{1+\alpha\eta} > 0$ 可知 A 可逆
- 下面说明在 log-log 情形下，对任意的行为参数 (behavioral parameters) 向量

$$(\beta, \gamma, \alpha, \delta) \in (0,1) \times (0,\infty) \times (0,1) \times (0,1),$$

矩阵 Φ 有且仅有一个特征值模长大于 1，故对数线性化模型总有唯一稳定解

log-log 情形 RBC 模型的求解

- $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有如下形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}_{2\times1}\\ \boldsymbol{0}_{1\times2} & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{0}_{1\times2} & \rho\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Phi=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{0}_{1\times2} & \rho\end{bmatrix}.$$

- 故 Φ 的特征值为 $\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1$ 的两个特征值 κ_1,κ_2 外加 ρ 若 $|\kappa_1|<1<|\kappa_2|$，则对数线性化模型存在唯一稳定解
- κ_1,κ_2 是特征多项式 $E(\kappa)=\det(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1-\kappa\boldsymbol{I}_{2\times2})$ 的两个根，而 $E(\kappa)$ 是一个二次函数

系数矩阵的形式

- 令 $\psi = \frac{\beta\bar{r}(1-\alpha)}{1+\alpha\eta} > 0$，则有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1+\psi\eta & \psi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\psi\eta} & \frac{-\psi}{1+\psi\eta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 由此知

$$A_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\psi\eta} + \frac{\psi}{1+\psi\eta}\frac{\varphi_c(1+\alpha\eta)+\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} & -\frac{\psi}{1+\psi\eta}\left(1-\delta+\frac{1+\alpha\eta-\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}\right) \\ -\frac{\varphi_c}{\varphi_k} - \frac{\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} & 1-\delta+\frac{1}{\varphi_k}-\frac{\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} \end{bmatrix}$$

- 简单计算可知，$E(\kappa) = \kappa^2 - \mathrm{tr}(A_1^{-1}B_1)\kappa + \det(A_1^{-1}B_1)$，其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹

系数矩阵特征值分布

- 计算可知：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1) = \frac{1}{1+\psi\eta} + \frac{\psi}{1+\psi\eta}\frac{\varphi_c(1+\alpha\eta)+\alpha\eta}{\varphi_k(1+\alpha\eta)} + 1 - \delta + \frac{1+\alpha\eta-\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)},$$
$$\det(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1) = \frac{1}{1+\psi\eta}\left[1 - \delta + \frac{1+\alpha\eta-\alpha}{\varphi_k(1+\alpha\eta)}\right].$$

- 故 $E(0) = \det(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1) > 0$
- 进一步计算可知 $E(1) = -\frac{\psi}{1+\psi\eta}\frac{\varphi_c}{\varphi_k}(\eta+1) < 0$，因此 $E(\kappa)$ 有两个不等实根 κ_1, κ_2 满足 $0 < \kappa_1 < 1 < \kappa_2$
- 综上，log-log 对数线性化模型 BK 形式系数矩阵 Φ 有三个实特征根 $(\kappa_1, \kappa_2, \rho)$，且其中仅有 κ_2 模长大于 1，满足 BK 唯一稳定解条件
- 当 KP 效用函数 $\sigma \neq 1$ 时，上述结论是否成立？